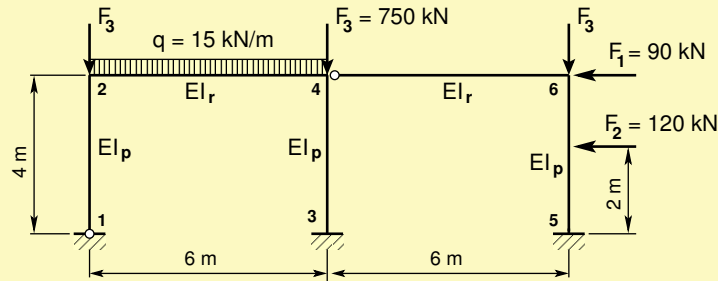


# Ehitusmehaanika. EST meetod

## Staatikaga määratu raam. II järku teooria



Andres Lahe  
 Mehaanikainstituut  
 Tallinna Tehnikaülikool

Tallinn 2010

# Sisukord

1	Ülesanne	4
2	Sissejuhatus	5
3	Raami põhivõrrandid	13
4	Varraste siirete pidevus	18
5	Raami sõlmede tasakaal	23
6	Raami kõrval- ja toetingimused	31
7	Raami staatikaline kontroll	39
8	Raami horisontaalne siire	40
9	Raami paindemomendi epüür	41

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

10 Raami põikjõu epüür

42

11 Raami normaaljõu epüür

43

12 Viited

44



3/45

Täis



Tagasi

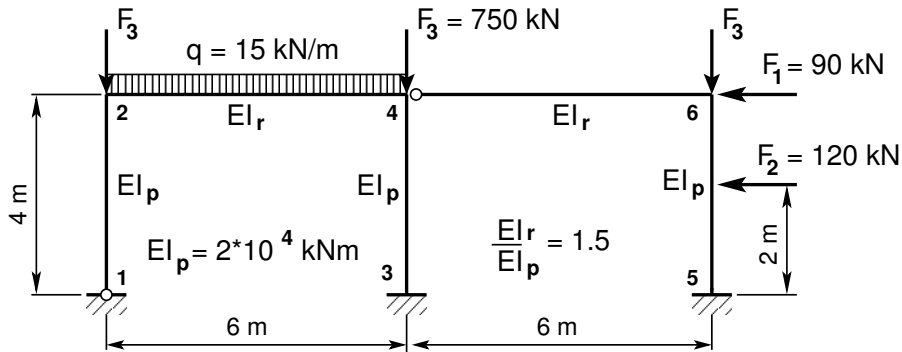
Edasi

Sulge

Lõpeta

# Ülesanne

Koostada joonisel 1 näidatud raamile paindemomendi, põikjõu ja pikijõu epüürid EST meetodiga teist järku teooria järgi.



Joonis 1. Kahe avaga raam

Raami posti ristlõike paindejäikus on  $EI_p = 2 * 10^4 \text{ kNm}^2$  ja raami ristlõike paindejäikus  $EI_r = 1.5EI_p$ , ristlõike pikijäikus  $EA_p = 4.6 * 10^6 \text{ kN}$ ,  $EA_r = 8.8 * 10^6 \text{ kN}$ , ristlõike lõikejäikus  $GA_{rp} = 0.4EA_p$ ,  $GA_{rr} = 0.4EA_r$ . Raami avad on  $6 \text{ m}$  ja postide pikkused  $4 \text{ m}$ .

Täis



Tagasi

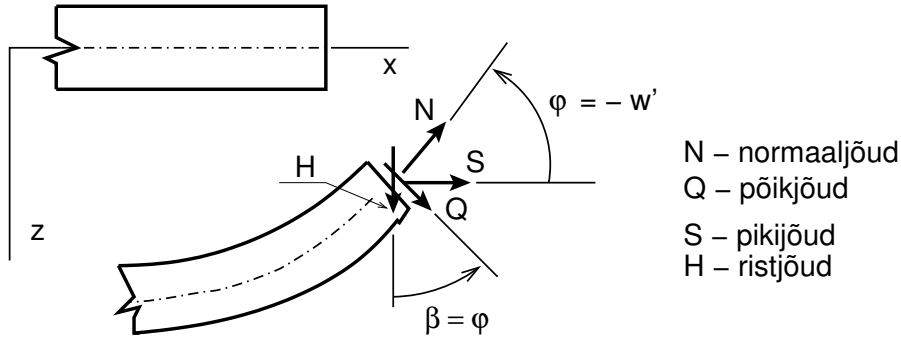
Edasi

Sulge

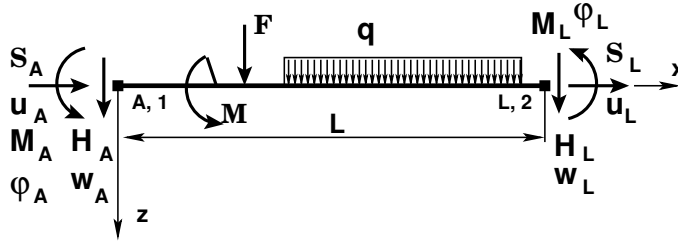
Lõpeta

# Sissejuhatus

Joonisel 2 on näidatud varda deformeerunud elemendile mõjuvad jõud pikijõud, ristjõud ja normaaljõud, põikjõud.



Joonis 2. Pikijõud, ristjõud, normaaljõud ja põikjõud



Joonis 3. Varda jõudude ja siirete positiivsed suunad

Nimetame võrrandeid (1) *varda põhivõrranditeks deformeerunud olukoras*.

$$\mathbf{I} * \mathbf{Z}_L - \mathbf{U} \mathbf{Z}_A = \mathring{\mathbf{Z}}, \quad (1)$$

ehk

$$\widehat{\mathbf{I}} \mathbf{U} * \widehat{\mathbf{Z}} = \mathring{\mathbf{Z}} \quad (2)$$

kus  $\mathbf{I}$  on (6x6) ühikmaatriks,  $\widehat{\mathbf{I}} \mathbf{U}$  (6x12) maatriks, mida saab arvutada GNU Octave funktsiooniga `ysplvmhvII(baasi0,S,x,l,EA,GAr,EI)`. Siin  $baasi0 = i_o = \frac{EI}{l}$  – baasjäikus, millega skaleeritakse siirdeid.

Koormusvektor  $\widehat{\mathbf{Z}}$  (3) koosneb varda lõpus ja alguses olevatest siiretest ning kontaktjõududest.

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_L \\ \mathbf{Z}_A \end{bmatrix}, \quad (3)$$

siin  $\mathbf{Z}_L$ ,  $\mathbf{Z}_A$  – varda lõpus ja alguses olevad siirded ning kontaktjõud.  
(4)

$$\mathbf{Z}_L = \begin{bmatrix} u_L \\ w_L \\ \varphi_L \\ \dots \\ S_L \\ H_L \\ M_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_A = \begin{bmatrix} u_A \\ w_A \\ \varphi_A \\ \dots \\ S_A \\ H_A \\ M_A \end{bmatrix}, \quad (4)$$

kus  $U$  on ülekan demaatriks on toodud avaldisega (5), (6)

kus  $U$  on ülekan demaatriks survel (5) ja tõmbel (6)

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i_o * \frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sin \nu \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & 0 & i_o * \left( \frac{\frac{\nu x}{l} - \sin \frac{\nu x}{l}}{\nu^3} \frac{l^3}{EI} \right) & i_o * \left( \frac{1 - \cos \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} \right) \\ 0 & 0 & \cos \frac{\nu x}{l} & 0 & -i_o * \left( \frac{-1 + \cos \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} \right) & -i_o * \left( \frac{-\sin \frac{\nu x}{l}}{\nu} \frac{l}{EI} \right) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \sin \frac{\nu x}{l} \frac{l}{EI} \frac{1}{i_o} & 0 & \frac{-\sin \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & -\cos \frac{\nu x}{l} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\tilde{U}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -i_o * \frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{sh \nu \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & 0 & i_o * \left( \frac{\frac{-\nu x}{l} + sh \frac{\nu x}{l}}{\nu^3} \frac{l^3}{EI} \right) & i_o * \left( \frac{-1 - ch \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} \right) \\ 0 & 0 & ch \frac{\nu x}{l} & 0 & i_o * \left( \frac{1 - ch \frac{\nu x}{l}}{\nu^2} \frac{l^2}{EI} \right) & i_o * \left( \frac{-sh \frac{\nu x}{l}}{\nu} \frac{l}{EI} \right) \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu sh \frac{\nu x}{l} \frac{l}{EI} \frac{1}{i_o} & 0 & \frac{-sh \frac{\nu x}{l}}{\nu} x & -ch \frac{\nu x}{l} \end{bmatrix} \quad (6)$$



kus

$$\nu = l \sqrt{\left| \frac{S}{EI} \right|} \quad (7)$$

on *varda tunnusarv* (sks *Stabkennzahl*),

Koormusvektor  $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$  ühtlaselt jaotatud koormuse  $q$  puhul survel on toodud avaldisega (8) ja tõmbel avaldisega (9)

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ S_e \\ H_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_o \left[ \frac{1}{2} \left( \nu \frac{x}{l} \right)^2 - 1 + \cos \left( \nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^4}{\nu^4 EI} \\ -i_o \left[ \nu \frac{x}{l} - \sin \left( \nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^3}{\nu^3 EI} \\ 0 \\ -q \cdot x \\ - \left[ 1 - \cos \left( \nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^2}{\nu^2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\mathbf{Z}}}_t = \begin{bmatrix} u_e \\ w_e \\ \varphi_e \\ S_e \\ H_e \\ M_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i_o \left[ \frac{1}{2} \left( \nu \frac{x}{l} \right)^2 - 1 - ch \left( \nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^4}{\nu^4 EI} \\ i_o \left[ \nu \frac{x}{l} - sh \left( \nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^3}{\nu^3 EI} \\ 0 \\ -q \cdot x \\ \left[ 1 - ch \left( \nu \frac{x}{l} \right) \right] \frac{ql^2}{\nu^2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Koormusvektoreid  $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q$ ,  $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F$  saab arvutada GNU Octave funktsioonidega  
`ylqvII(baasi0,S,x,lp,qz,EA,EI)`,  
`ylfhvzII(baasi0,S,x,l,a,Fz,EI)`.

Täis



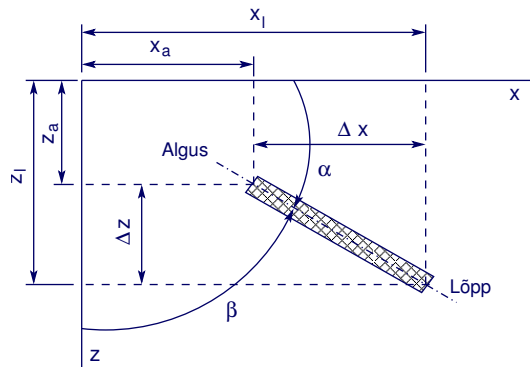
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Joonisel 4 on näidatud suunakoosinuste arvutamine.



Joonis 4. Varda suunakoosinused

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{l} \quad \cos \beta = \frac{\Delta z}{l} \quad (10)$$

siin

$$\Delta x = x_L - x_A, \quad \Delta z = z_L - z_A, \quad l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} \quad (11)$$

ja  $x_A$ ,  $z_A$ ,  $x_L$ ,  $z_L$  on varda alguse ning lõpu koordinaadid.

Teisendusmaatriks  $\mathbf{T}_2$  teisendab vektori kohalikest koordinaatidest üldkoordinaatidesse.

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (12)$$

Võtame arvesse pöördenurga, siis on teisendusmaatriks  $\mathbf{T}$  järgmine

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta & 0 \\ \cos \beta & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Täis



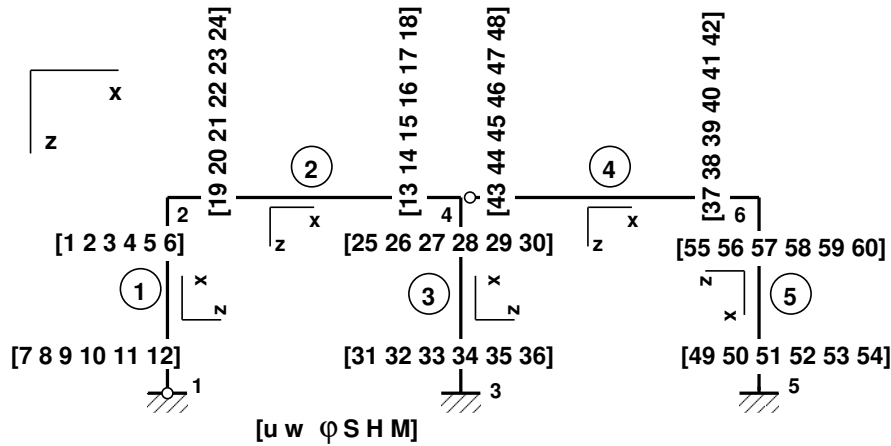
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

# Raami põhivõrrandid



Joonis 5. Raami tundmatute nummerdus

Raami *põhivõrrandite* arv  $n = 6 \cdot n_{\text{elementi}} = 6 \cdot 5 = 30$ , milles on  $12 \cdot 5 = 60$  tundmatut.

Võrrandisüsteemi struktuur (joonis 6).

Täis

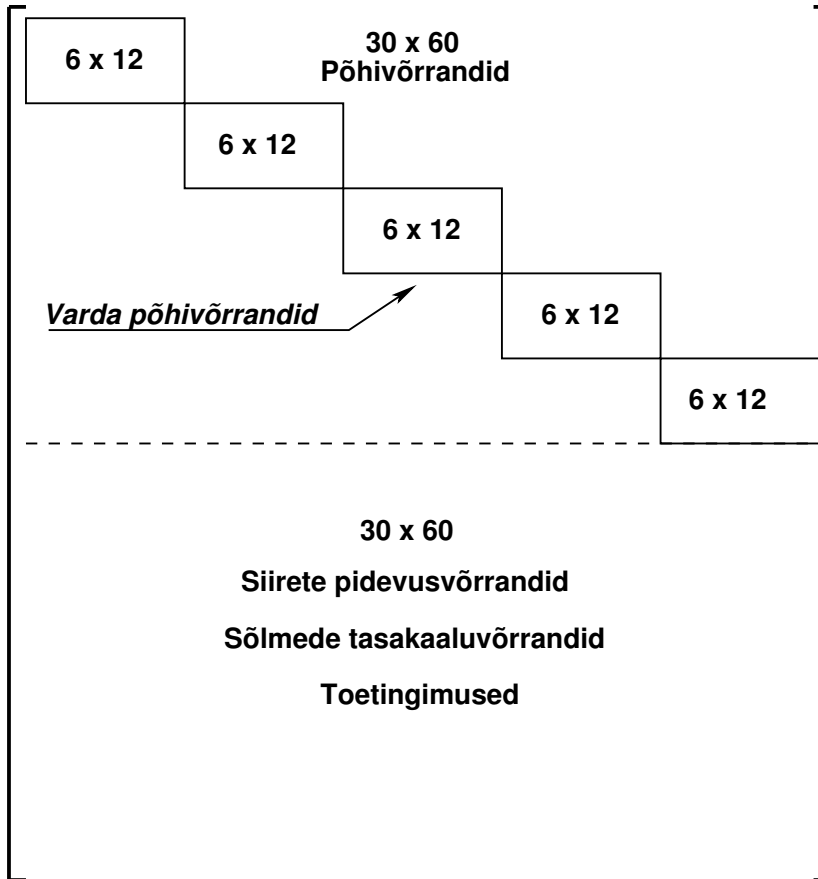


Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta



Joonis 6. Võrrandisüsteemi struktuur

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Programm põhivõrrandite koostamiseks:

```
IIV=0;
IJv=0;
%
for i=1:NEARV      % siin NEARV=5
krda=i;
EA=selem(i,14);
EI=selem(i,13);
Li=lvarras(i,1);
SII=SI(i,1);      % Vardas mõjuv pikijõud S
qz=qzZ(i,1);
aLx=aLXx(i,1);
Fz=FZz(i,1);
spvF=ysplvmhvII(baasi0,SII,Li,Li,EA,GAr,EI); % põhivõrrandite kordajad
vB=ylqvII(baasi0,SII,Li,Li,qz,EA,EI);      % põhivõrrandite vabaliikmed
vFz=ylfhvzII(baasi0,SII,Li,Li,aLx,Fz,EI); % põhivõrrandite vabaliikmed
vB=vB+vFz;
IIV=krda*6-5;
IJv=krda*12-11;
spA=spInsertBtoA(spA,IIV,IJv,spvF);
B=InsertBtoA(B,NNK,1,IIV,1,vB,6,1);
%
endfor
```



15/45

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

# Põhivõrrandite kordajate väljatrükk:

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 30, cols = 60, nnz = 100)

Element 1

(1, 1) -> 1	(2, 8) -> -1	(3, 11) -> 1.8924
(2, 2) -> 1	(2, 9) -> 3.5743	(5, 11) -> 1
(3, 3) -> 1	(3, 9) -> -0.68776	(6, 11) -> 3.5743
(4, 4) -> 1	(6, 9) -> 0.58974	(2, 12) -> -1.8924
(5, 5) -> 1	(1, 10) -> 0.0043478	(3, 12) -> 0.89358
(6, 6) -> 1	(4, 10) -> 1	(6, 12) -> 0.68776
(1, 7) -> -1	(2, 11) -> -2.5800	

Element 2

(7, 13) -> 1	(8, 20) -> -1	(9, 23) -> 2.9923
(8, 14) -> 1	(8, 21) -> 5.9691	(11, 23) -> 1
(9, 15) -> 1	(9, 21) -> -0.98458	(12, 23) -> 5.9691
(10, 16) -> 1	(12, 21) -> 0.030753	(8, 24) -> -2.9923
(11, 17) -> 1	(7, 22) -> 0.0044118	(9, 24) -> 0.99486
(12, 18) -> 1	(10, 22) -> 1	(12, 24) -> 0.98458
(7, 19) -> -1	(8, 23) -> -5.9907	(12, 24) -> 0.98458

Element 3



16/45

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta



(13, 25) -> 1	(14, 32) -> -1	(15, 35) -> 1.8988
(14, 26) -> 1	(14, 33) -> 3.5992	(17, 35) -> 1
(15, 27) -> 1	(15, 33) -> -0.70565	(18, 35) -> 3.5992
(16, 28) -> 1	(18, 33) -> 0.55796	(14, 36) -> -1.8988
(17, 29) -> 1	(13, 34) -> 0.0043478	(15, 36) -> 0.89981
(18, 30) -> 1	(16, 34) -> 1	(18, 36) -> 0.70565
(13, 31) -> -1	(14, 35) -> -2.5852	

## Element 4

(19, 37) -> 1	(20, 44) -> -1	(21, 47) -> 2.9762
(20, 38) -> 1	(20, 45) -> 5.9049	(23, 47) -> 1
(21, 39) -> 1	(21, 45) -> -0.95258	(24, 47) -> 5.9049
(22, 40) -> 1	(24, 45) -> 0.094077	(20, 48) -> -2.9762
(23, 41) -> 1	(19, 46) -> 0.0044118	(21, 48) -> 0.98414
(24, 42) -> 1	(22, 46) -> 1	(24, 48) -> 0.95258
(19, 43) -> -1	(20, 47) -> -5.9714	

## Element 5

(25, 49) -> 1	(26, 56) -> -1	(27, 59) -> 1.9033
(26, 50) -> 1	(26, 57) -> 3.6169	(29, 59) -> 1
(27, 51) -> 1	(27, 57) -> -0.71835	(30, 59) -> 3.6169
(28, 52) -> 1	(30, 57) -> 0.53524	(26, 60) -> -1.9033
(29, 53) -> 1	(25, 58) -> 0.0043478	(27, 60) -> 0.90422
(30, 54) -> 1	(28, 58) -> 1	(30, 60) -> 0.71835
(25, 55) -> -1	(26, 59) -> -2.5888	

Täis



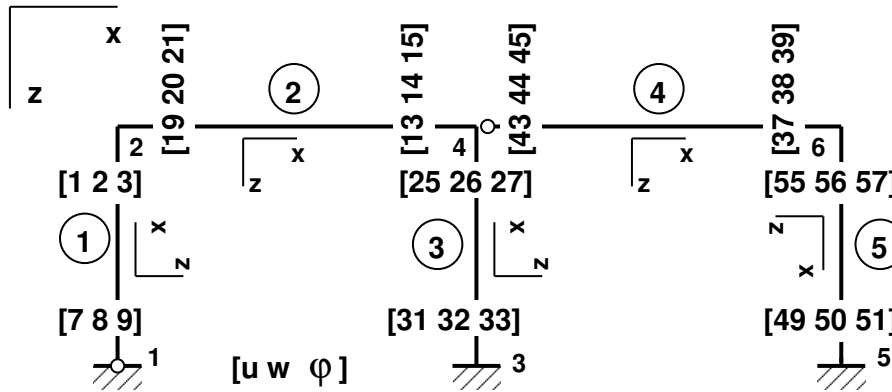
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

# Varraste siirete pidevus



Joonis 7. Raami siirete pidevus

Sõlmes 2 on varraste 1 ja 2 siirded pidevad.

$$\begin{matrix} 31 \\ 32 \\ 33 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{19} \\ Z_{20} \\ Z_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Täis

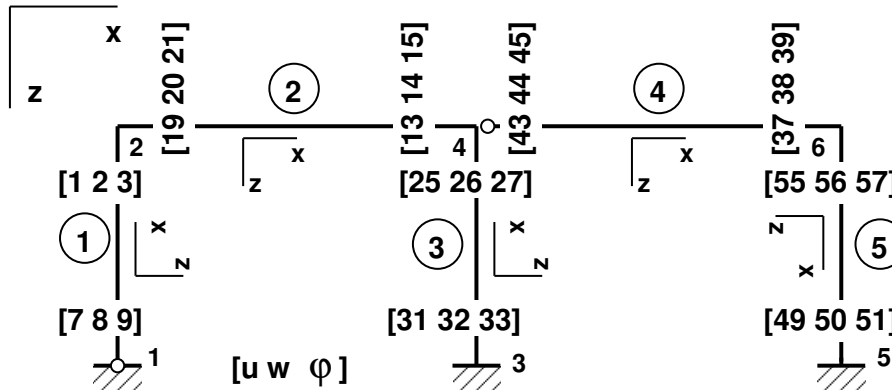


Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta



Joonis 8. Raami siirete pidevus

Sõlmes 4 on varraste 2 ja 3 siirded pidevad (! Jälgi trasitiivsust).

$$\begin{matrix}
 34 \\
 35 \\
 36
 \end{matrix}
 \begin{bmatrix}
 1.0 & 0 & 0 \\
 0 & 1.0 & 0 \\
 0 & 0 & 1.0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Z_{13} \\
 Z_{14} \\
 Z_{15}
 \end{bmatrix}
 -
 \begin{bmatrix}
 0 & 1.0 & 0 \\
 -1.0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1.0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 Z_{25} \\
 Z_{26} \\
 Z_{27}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (15)$$

Sõlmes 4 on varraste 3 ja 4 siirded pidevad (! Jälgi trasitiivsust).

Täis



Tagasi

Edasi

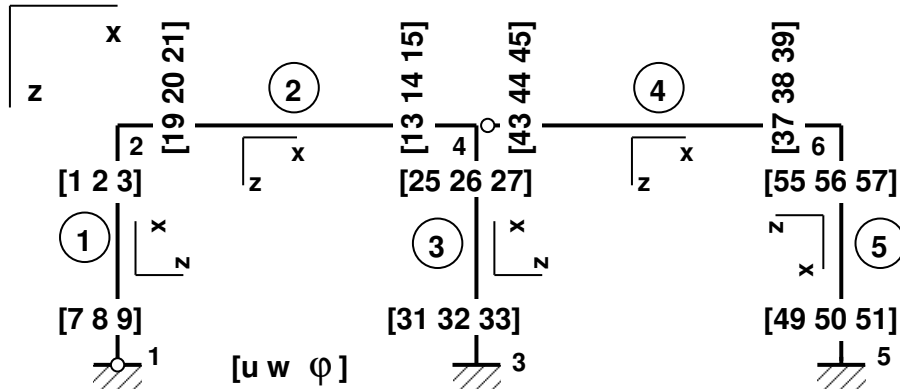
Sulge

Lõpeta

Sõlmes 4 on varraste 3 ja 4 siirded pidevad (! Jälgi trasitiivsust).

$$\begin{matrix} 38 \\ 39 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ -1.0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{25} \\ Z_{26} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{43} \\ Z_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Sõlmes 6 on varraste 4 ja 5 siirded pidevad.



Joonis 9. Raami siirete pidevus

$$\begin{matrix} 40 \\ 41 \\ 42 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{37} \\ Z_{38} \\ Z_{39} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1.0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{55} \\ Z_{56} \\ Z_{57} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Võrrandid (14), (15), (16), (17) paigutame tasakaaluvõrranditesse (26) alates reast 31. Tundmatute  $Z_i$  kordajateks on varda  $j$  teisendusmaatriks  $spTj$  kordajad. Siin teisendusmaatriks  $spTj$  on hõreda maatriksina. Teisendusmaatriksi  $spTjm$  kordajad on korutatud läbi -1-ga.

Arvutiprogrammis kasutame selleks GNU Octave funktsiooni `spInsertBtoA.m`

```
=====
%Siirete pidevuse võrrandid 31-41   % vabaliikmed on nullid
=====
spA=spInsertBtoA(spA,31,1,spT1);    spA=spInsertBtoA(spA,31,19,spT2m);
B(31:33,1)=0.0;
spA=spInsertBtoA(spA,34,13,spT2);  spA=spInsertBtoA(spA,34,25,spT3m);
B(34:36,1)=0.0;
spA=spInsertBtoA(spA,37,25,spT32); spA=spInsertBtoA(spA,37,43,spT42m);
B(37:38,1)=0.0;
spA=spInsertBtoA(spA,39,37,spT4);  spA=spInsertBtoA(spA,39,55,spT5m);
B(39:41,1)=0.0;
```

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Konstruksiooni tasakaaluvõrrandite väljatrükkis on need kordajad järgmised:

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 41, cols = 57, nnz = 22)

(32, 1) -> -1	(33, 21) -> -1	(41, 39) -> 1
(31, 2) -> 1	(35, 25) -> 1	(37, 43) -> -1
(33, 3) -> 1	(38, 25) -> -1	(38, 44) -> -1
(34, 13) -> 1	(34, 26) -> -1	(40, 55) -> -1
(35, 14) -> 1	(37, 26) -> 1	(39, 56) -> 1
(36, 15) -> 1	(36, 27) -> -1	(41, 57) -> -1
(31, 19) -> -1	(39, 37) -> 1	
(32, 20) -> -1	(40, 38) -> 1	



22/45

Täis



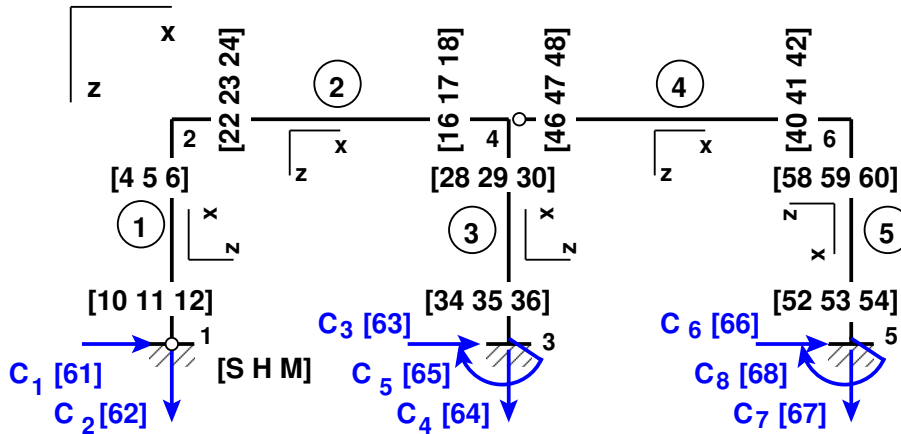
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

# Raami sõlmede tasakaal



Joonis 10. Raami sõlmede tasakaal

Sõlm 2 on tasakaalus

$$\begin{matrix} 42 \\ 43 \\ 44 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{22} \\ Z_{23} \\ Z_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 750.0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Täis

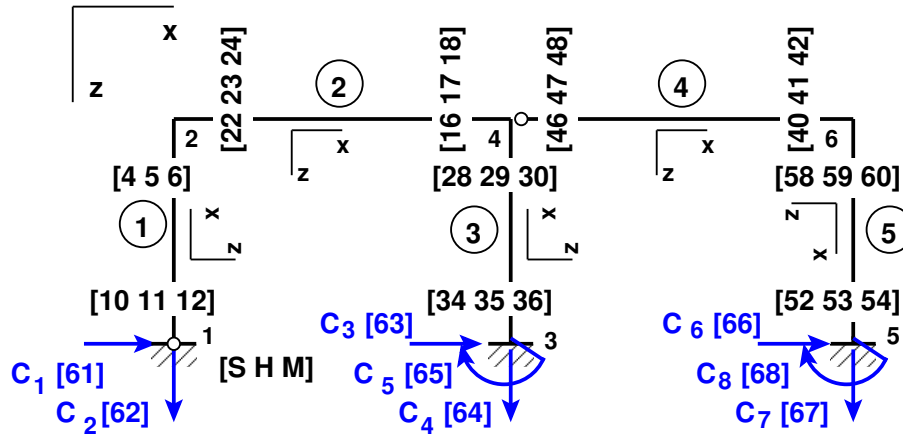


Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

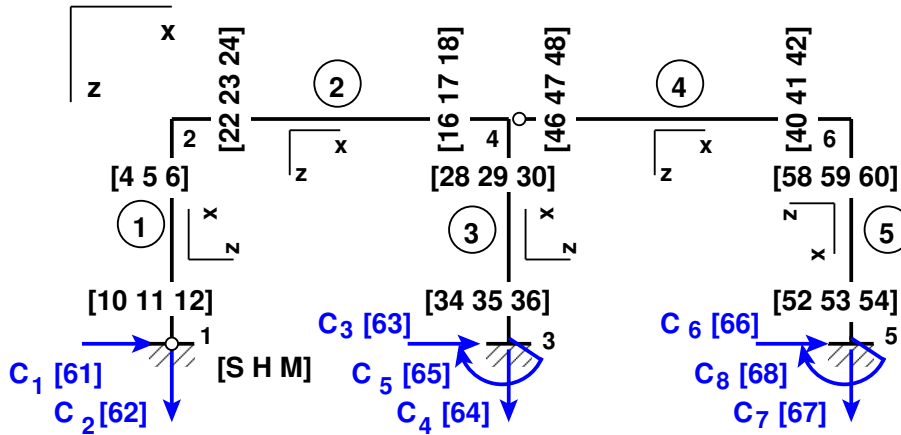


Joonis 11. Raami sõlmede tasakaal

Sõlm 4 on tasakaalus

$$\begin{matrix} 45 \\ 46 \\ 47 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{16} \\ Z_{17} \\ Z_{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{28} \\ Z_{29} \\ Z_{30} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{46} \\ Z_{47} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 750.0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$





Joonis 12. Raami sõlmede tasakaal

Sõlm 6 on tasakaalus

$$\begin{matrix} 48 \\ 49 \\ 50 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{40} \\ Z_{41} \\ Z_{42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1.0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{58} \\ Z_{59} \\ Z_{60} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Täis

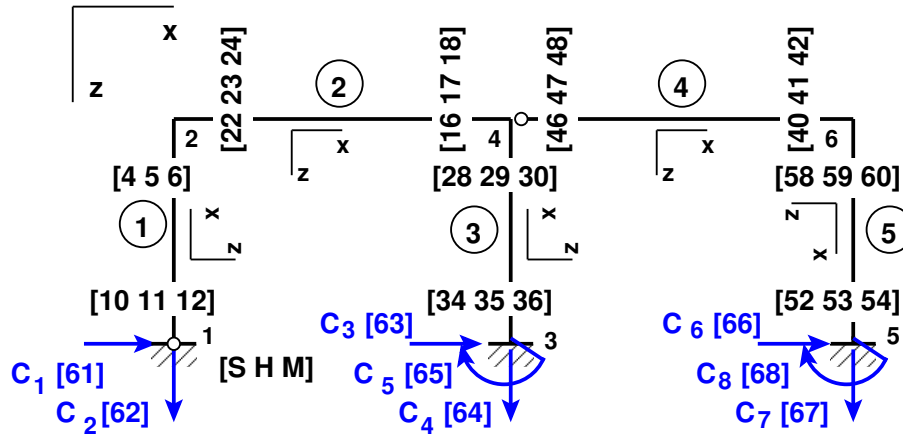


Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

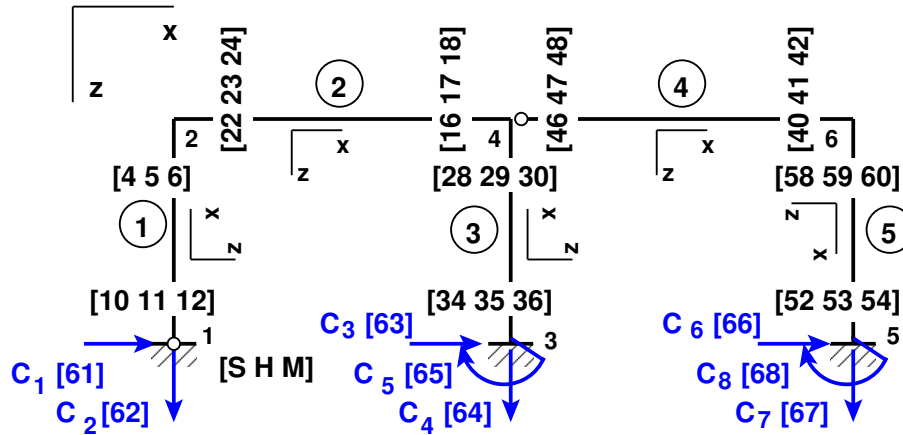


Joonis 13. Raami sõlmede tasakaal

Sõlm 1 on tasakaalus (toereaktsioonid  $C_1 \equiv Z_{61}$ ,  $C_2 \equiv Z_{62}$  )

$$\begin{matrix} 51 \\ 52 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ -1.0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{10} \\ Z_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{61} \\ Z_{62} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

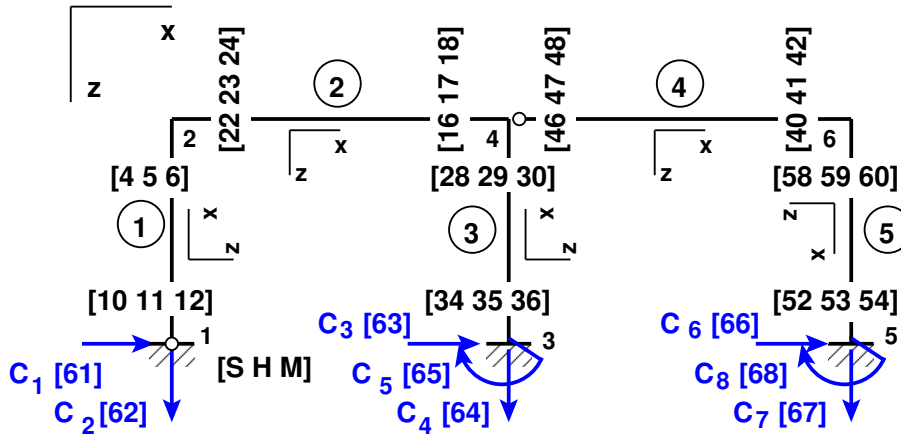
Võrrandisüsteemi siirete ja kontaktjõudude leidmiseks (26) võib koostada ilma toesõlmede tasakaaluvõrranditeta (21). Avaldis (21) toob toereaktsioonid eraldi välja. Toereaktsioone näeme varda 1 alguses olevate kontaktjõudude  $Z_{10}$ ,  $Z_{11}$  abil.



Joonis 14. Raami sõlmede tasakaal

Sõlm 3 on tasakaalus (toereaktsioonid  $C_3 \equiv Z_{63}$ ,  $C_4 \equiv Z_{64}$ ,  $C_5 \equiv Z_{65}$ )

$$\begin{matrix} 53 \\ 54 \\ 55 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0 \\ -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{34} \\ Z_{35} \\ Z_{36} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{63} \\ Z_{64} \\ Z_{65} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$



Joonis 15. Raami sõlmede tasakaal

Sõlm 5 on tasakaalus (toereaktsioonid  $C_6 \equiv Z_{66}$ ,  $C_7 \equiv Z_{67}$ ,  $C_8 \equiv Z_{68}$  )

$$\begin{matrix} 56 \\ 57 \\ 58 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -1.0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{52} \\ Z_{53} \\ Z_{54} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{66} \\ Z_{67} \\ Z_{68} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

# Arvutiprogrammis kasutame tasakaaluvõrrandite sisestamiseks GNU Octave funktsiooni spInsertBtoA.m



29/45

=====

%Sõlmede tasakaaluvõrrandid 42-58

=====

```
spA=spInsertBtoA(spA,42,4,spT1);    spA=spInsertBtoA(spA,42,22,spT2);
B(42:44,1)=s2F(1:3,1);
spA=spInsertBtoA(spA,45,16,spT2);  spA=spInsertBtoA(spA,45,28,spT3);
spA=spInsertBtoA(spA,45,46,spT42);
B(45:47,1)=s4F(1:3,1);
spA=spInsertBtoA(spA,48,40,spT4);  spA=spInsertBtoA(spA,48,58,spT5);
B(48:50,1)=s6F(1:3,1);
spA=spInsertBtoA(spA,51,10,spT12); spA=spInsertBtoA(spA,51,61,spTy2m);
B(51:52,1)=0.0;                    % sõlme 1 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,53,34,spT3);  spA=spInsertBtoA(spA,53,63,spTym);
B(53:55,1)=0.0;                    % sõlme 3 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,56,52,spT5);  spA=spInsertBtoA(spA,56,66,spTym);
B(56:58,1)=0.0;                    % sõlme 5 koormus
```

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Konstruksiooni tasakaaluvõrrandite väljatrükk on need kordajad järgmised:

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 58, cols = 68, nnz = 36)

(43, 4) -> -1	(45, 29) -> 1	(58, 54) -> 1
(42, 5) -> 1	(47, 30) -> 1	(49, 58) -> 1
(44, 6) -> 1	(54, 34) -> -1	(48, 59) -> -1
(52, 10) -> -1	(53, 35) -> 1	(50, 60) -> 1
(51, 11) -> 1	(55, 36) -> 1	(51, 61) -> -1
(45, 16) -> 1	(48, 40) -> 1	(52, 62) -> -1
(46, 17) -> 1	(49, 41) -> 1	(53, 63) -> -1
(47, 18) -> 1	(50, 42) -> 1	(54, 64) -> -1
(42, 22) -> 1	(45, 46) -> 1	(55, 65) -> -1
(43, 23) -> 1	(46, 47) -> 1	(56, 66) -> -1
(44, 24) -> 1	(57, 52) -> 1	(57, 67) -> -1
(46, 28) -> -1	(56, 53) -> -1	(58, 68) -> -1



30/45

Täis



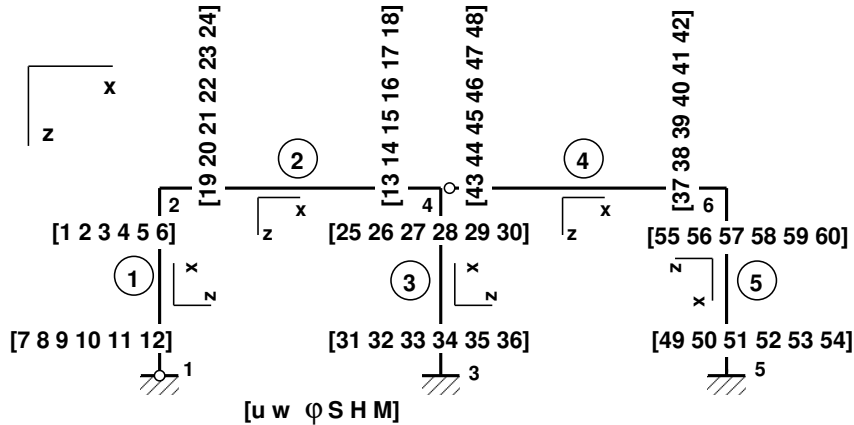
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

# Raami kõrval- ja toetingimused



Joonis 16. Raami kõrvaltingimused

*Kõrvaltingimused* (momendiliigendid varraste 1, 2, 4 ja 5 otstes). Varda 1 algul oleva momendiliigendi  $Z_{12}$  kirjutame toetingimustesse.

$${}^{59} [ Z_{48} ] = [ 0 ] \quad (24)$$

Täis

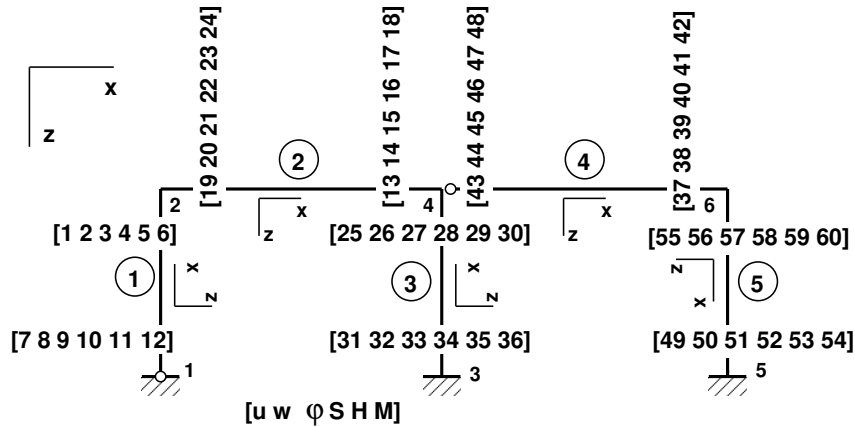


Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta



Joonis 17. Raami toetingimused

Toetingimused (varraste 1, 3 algul ja varda 5 lõpus).

$$\begin{array}{l}
 60 \\
 61 \\
 62 \\
 63 \\
 64
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 Z_7 \\
 Z_8 \\
 Z_{12} \\
 Z_{31} \\
 Z_{32}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix},
 \quad
 \begin{array}{l}
 65 \\
 66 \\
 67 \\
 68
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 Z_{33} \\
 Z_{49} \\
 Z_{50} \\
 Z_{51}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{bmatrix}
 \quad (25)$$

Tundmatuid ja võrrandeid on 68.

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta



# Arvutiprogrammis kasutame võrrandite sisestamiseks GNU Octave funktsiooni spSisestaArv.m



33/45

```
=====
% Kõrvaltingimused 59
=====
spA=spSisestaArv(spA,59,48,1);      % kõrvaltingimus
B(59,1)=0.0;
=====
% Toereaktsioonid 60-68           % vabaliikmete vektor on nullitud
=====
spA=spSisestaArv(spA,60,12,1);     % kõrvaltingimus/toetingimus
B(60,1)=0.0;                       % M60=0
spA=spSisestaArv(spA,61,7,1);      % toesõlm 1
spA=spSisestaArv(spA,62,8,1);
spA=spSisestaArv(spA,63,31,1);     % toesõlm 3
spA=spSisestaArv(spA,64,32,1);     spA=spSisestaArv(spA,65,33,1);
spA=spSisestaArv(spA,66,49,1);     % toesõlm 5
spA=spSisestaArv(spA,67,50,1);     spA=spSisestaArv(spA,68,51,1);
B(61:68,1)=0.0;
```

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Konstruksiooni tasakaaluvõrrandite väljatrükk on need kordajad järgmised:

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 68, cols = 51, nnz = 10)

(61, 7) -> 1	(65, 33) -> 1
(62, 8) -> 1	(59, 48) -> 1
(60, 12) -> 1	(66, 49) -> 1
(63, 31) -> 1	(67, 50) -> 1
(64, 32) -> 1	(68, 51) -> 1

Hõreda võrrandisüsteemi (26)

$$\mathbf{spA} * \mathbf{Z} = \mathbf{B} \quad (26)$$

lahendame GNU Octavega järgmise käsuga:

```
Z=spA\B; % Võrrandisüsteemi spA*Z=B lahend
```

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

## Raami toereaktsioonid:

61	2.153e+01	66	1.322e+02
62	-8.288e+02	67	-7.380e+02
63	5.625e+01	68	-2.395e+02
64	-7.732e+02		
65	-1.571e+02		

Varraste alguses olevad siirded jagame baasjäikusega  $i_o$   
 Varraste algparameetrid on järgmised:

=====

Algparameetrid skaleerimata

Varda Nr	u	w	fi	S	H	M
1	0.000e+00	0.000e+00	1.166e-02	828.823	21.535	0.000
2	-3.057e-02	7.207e-04	-1.308e-04	21.535	-78.823	111.354
3	0.000e+00	0.000e+00	0.000e+00	773.182	56.251	-157.125
4	-3.058e-02	6.723e-04	-2.423e-03	77.786	-12.006	0.000
5	6.417e-04	3.065e-02	4.838e-03	737.994	12.214	-72.033

-----

Siirded ja sisejõud ristlõikes leiame avaldisega (27)

$$\mathbf{Z}_x = \mathbf{U}\mathbf{Z}_A + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (27)$$

kus  $\mathbf{Z}_x$  on siirded ja kontaktjõud ristlõikes  $x$ ,  $\mathbf{Z}_A$  – algparameetrid.

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

## Väljavõtte programmist siirete ja sisejõudude arvutamiseks.

```
for i=1:NEARV
    krda=i;
    vF=zeros(6,12);
    EA=selem(i,14);
    EI=selem(i,13);
    Li=lvarras(i,1);
    SII=SI(i,1);
    qz=qzZ(i,1);
    aLx=aLXx(i,1);
    Fz=FZz(i,1);
    xsamm=Li/Nmitmeks; % varda neljandikel sisejõud
    xx=0;
    AP=AlgPar(i,:)';
    %
    for ij=1:Nmitmeks+1 % 5 - sisejõud ka varda algul
        vvF=yflmhvII(1.0,SII,xx,Li,EA,GAr,EI);
        vvB=yqlqvII(1.0,SII,xx,Li,qz,EA,EI);
        vvFz=yflfhvzII(1.0,SII,xx,Li,aLx,Fz,EI);
        Fvv(:,ij)=vvF*AP+vvB+vvFz;
        FvvNQ(:,ij)=ytransfp(SII,Li,EI)*Fvv(:,ij); % S, H => N, Q
        xx=xx+xsamm;
    endfor
%
```



```

    disp(' Varras Li on jaotatud neljaks ')
    Li
    for i=1:3
        disp(sprintf('%14s      %9.5e  %9.5e  %9.5e  %9.5e  %9.5e',
            suurused(i,:), Fvv(i,1),  Fvv(i,2),  Fvv(i,3),  Fvv(i,4),  Fvv(i,5)))
    endfor
    %
    for i=4:6
        disp(sprintf('%14s %9.5f  %9.5f  %9.5f  %9.5f  %9.5f',
            suurused(i,:), Fvv(i,1),  Fvv(i,2),  Fvv(i,3),  Fvv(i,4),  Fvv(i,5)))
    endfor
    %
    for i=4:6
        disp(sprintf('%16s %9.5f  %9.5f  %9.5f  %9.5f  %9.5f',
            suurusedNQ(i,:), FvvNQ(i,1),  FvvNQ(i,2),  FvvNQ(i,3),  FvvNQ(i,4),
            FvvNQ(i,5)))
    endfor
    %
endfor
%
```

Siin funktsioon [ytransfp.m](#) teisendab pikijõu S ja ristjõu H normaaljõuks N ja põikjõuks Q.

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Pikijõu S ja ristjõu H teisendus normaaljõuks N ja põikjõuks Q [Krätzig]



38/45

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ N \\ Q \\ M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & . & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . & . \\ . & . & \mp \nu^2 \frac{EI}{l^2} & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi_y \\ S \\ H \\ M_y \end{bmatrix} \quad (28)$$

ehk maatrikskujul

$$\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{T}}^{-1} \tilde{\mathbf{Z}} \quad (29)$$

siin teisendusmaatriksit  $\tilde{\mathbf{T}}^{-1}$  saab arvutada GNU Octave funktsiooniga [ytransfp.m](#).

$$Q = H \mp \nu^2 \frac{EI}{l^2} \varphi \text{ siis kui } \begin{bmatrix} \text{surve} \\ \text{tõmme} \end{bmatrix} \quad (30)$$

kus  $\nu$  on *tunnusarv*

$$\nu^2 = l^2 \frac{|S|}{EI} \quad (31)$$

Täis



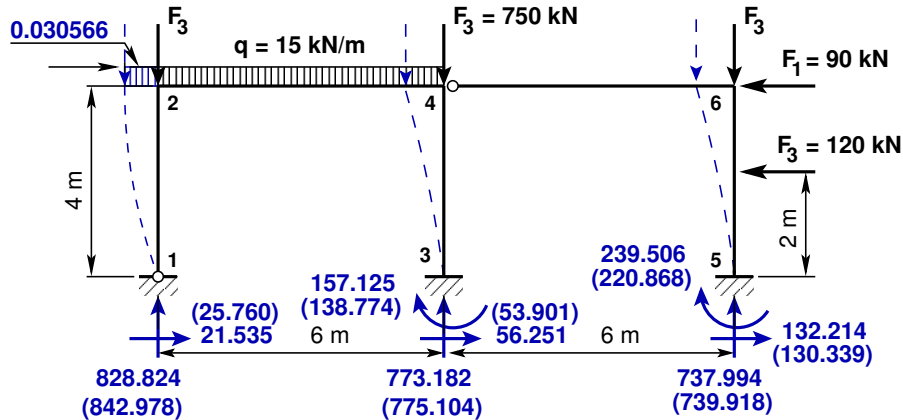
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

# Raami staatikaline kontroll

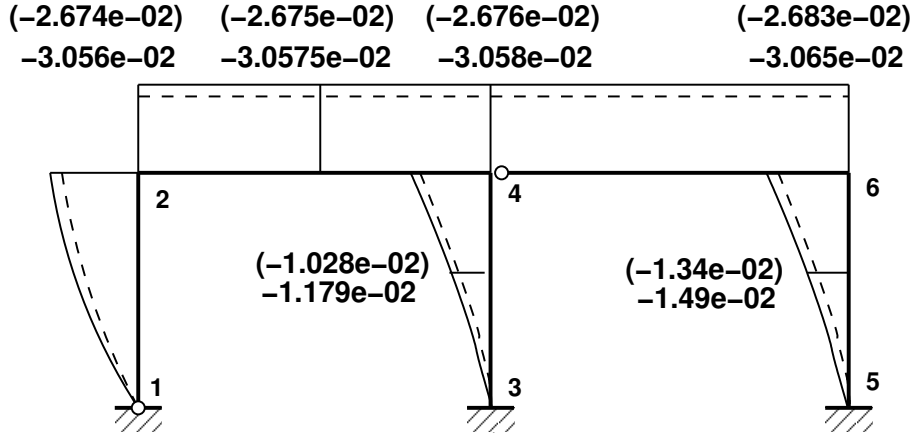


Joonis 18. Raami staatikaline kontroll

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0; & 21.53459 + 56.25101 + 132.21440 - 90 &= 0.0 \\ \Sigma Z &= 0; & -828.823 - 773.182 - 737.994 + 15 * 6.0 + 3 * 750 &= 0.0 \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_1 &= 0; & -157.125 - 239.506 + 773.182 * 6 + 737.994 * 12 + & \\ & + 120.0 * 2.0 + 90.0 * 4.0 - 750.0 * (12.0 - 0.03065) - & \\ & - 750.0 * (6.0 - 0.030585) - 15 * 6.0 * (3.0 - 0.030566) + & \\ & + 0.030566 * 750.0 &= -0.0093 \approx 0 \end{aligned} \quad (33)$$

# Raami horisontaalne siire



Joonis 19. Raami horisontaalne siire  $w$  [m]

Täis



Tagasi

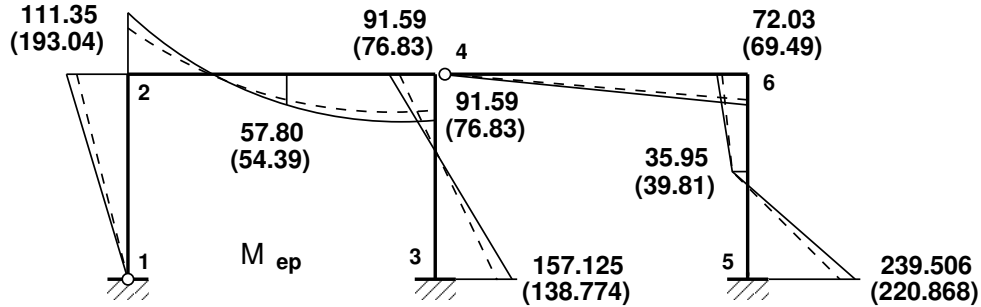
Edasi

Sulge

Lõpeta



# Raami paindemomendi epüür



Joonis 20. Raami paindemoment  $M$  [kNm]

Täis



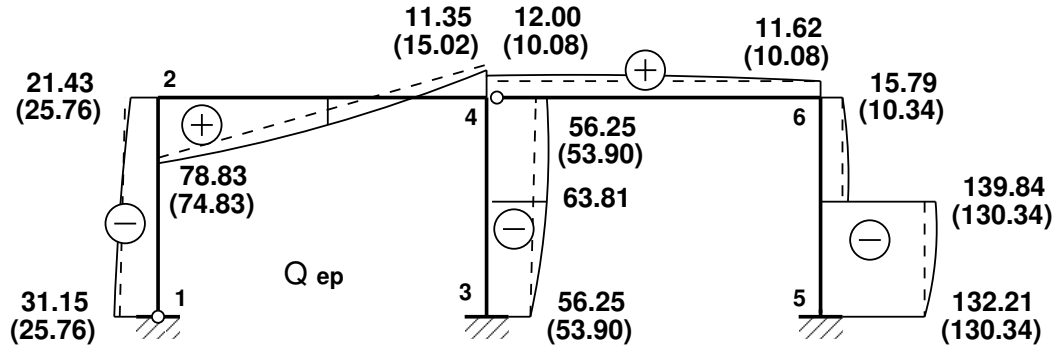
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

# Raami põikjõu epüür



Joonis 21. Raami põikjõud  $Q$  [kN]

Täis



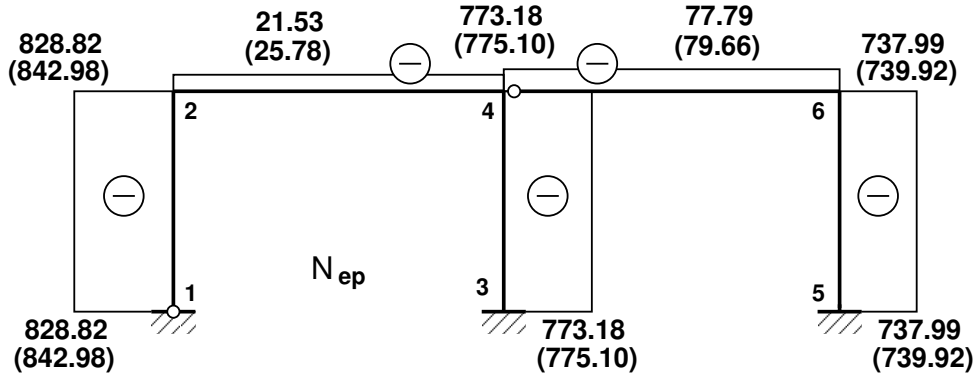
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

# Raami normaaljõu epüür



Joonis 22. Raami normaaljõud  $N$  [kN]

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

# Viited

## 1. EST meetod:

A. Lahe. The transfer matrix and the boundary element method, Proc. Estonian Acad. Sci. Engng., 1997, 3, 1. p. 3–12. <sup>1</sup>

A. Lahe. The EST method for the frame analysis in second order theory, Proc. of the NSCM-11: Nordic Seminar on Computational Mechanics, October 16-17, 1997, Royal Institute of Technology, Department of Structural Engineering, Stockholm, TRITA-BKN. Bulletin 39, Stockholm, 1998, p.167–170.

W. B. Krätzig. Statik der Tragwerke, 4. Finite Berechnungsmethoden (4.a Grundlagen; Stabtragwerke). Bochum, Ruhr - Universität Bochum, Fakultät für Bauingenieurwesen, 1991.

---

<sup>1</sup>[http://books.google.ee/books?id=ghco7svk5T4C&pg=PA3&lpg=PA3&dq=Andres+Lahe&source=bl&ots=3SFfo4UCES&sig=\\_XLUez-SfW2FVYGRx8v2LVm16V8&hl=et&ei=YQaFTMeIEoWc00yCyNwP&sa=X&oi=book\\_result&ct=result&resnum=5&ved=OCBOQ6AEwBDgK#v=onepage&q=Andres%20Lahe&f=false](http://books.google.ee/books?id=ghco7svk5T4C&pg=PA3&lpg=PA3&dq=Andres+Lahe&source=bl&ots=3SFfo4UCES&sig=_XLUez-SfW2FVYGRx8v2LVm16V8&hl=et&ei=YQaFTMeIEoWc00yCyNwP&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=5&ved=OCBOQ6AEwBDgK#v=onepage&q=Andres%20Lahe&f=false)

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

## 2. Raami arvutamise programm EST meetodiga:

[http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/  
octaveProgrammID/yaspRaamESTR.m](http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/yaspRaamESTR.m)

Kasutab funktsioone:

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/ysplvmhvII.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/ysplfmhvII.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/ylqvII.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/ylfhvzII.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/spInsertBtoA.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/spSisestaArv.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/ylfmhvII.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/ytransfp.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/InsertBtoA.m>

## 3. <http://et.wikipedia.org/wiki/Transitiivsus>

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta