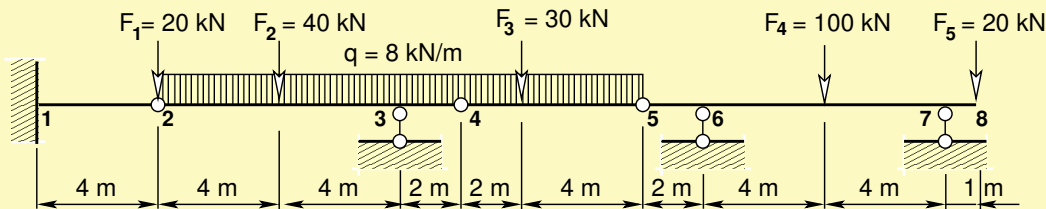


Ehitusmehaanika. EST meetod

Gerberi tala



Andres Lahe
 Mehaanikainstituut
 Tallinna Tehnikaülikool

Tallinn 2010

Sisukord

1	Ülesanne	3
2	Sissejuhatus	4
3	Raami põhivõrrandid	10
4	Raami sõlmede tasakaal	15
5	Raami kõrvaltingimused	20
6	Tala staatikaline kontroll	25
7	Tala põikjõu ja paindemomendi epüür	26
8	Viited	27

Täis



Tagasi

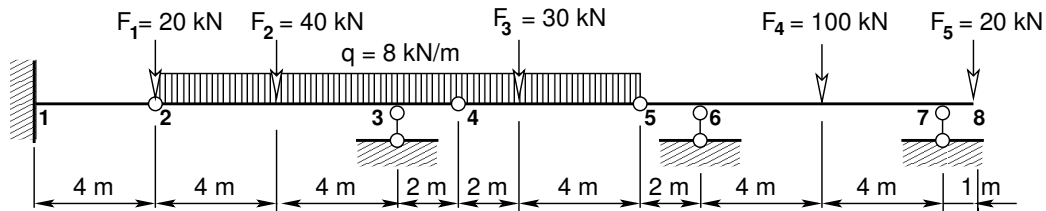
Edasi

Sulge

Lõpeta

Ülesanne

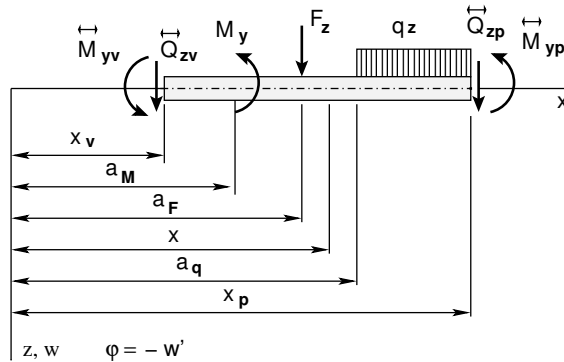
Leida joonisel 1 näidatud staatikaga määratud tala sisejõud EST meetodiga.



Joonis 1. Gerberi tala

Sissejuhatus

Joonisel 2 on näidatud varda jõudude ja siirete positiivsed suunad vastavalt teisele märgikokkuleppele



Joonis 2. Universaalvõrrand

$$\begin{aligned}
 w_p = w_v - (\varphi_y)_v x + \frac{1}{EI_y} \sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^2}{2!} + \\
 + \frac{1}{EI_y} \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^3}{3!} + \frac{1}{EI_y} \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^4}{4!}
 \end{aligned} \quad (1)$$

Elastse joone universaalvõrrandis (1) on järgmised tähistused:

EI_y – varda ristlõike jäikus,

\mathcal{M}_y – momentkoormus,

F_z – koondatud jõud,

q_z – ühtlaselt jaotatud koormus

Võtame avaldisest (1) tuletised ja võtame kasutusele tähistused (2)

$$w_0 = w_0, \quad w'_0 = -\varphi_0, \quad w''_0 = -\frac{M_y}{EI}, \quad w'''_0 = -\frac{Q_z}{EI} \quad (2)$$

Kirjutame saadud võrrandid välja maatriks kujul (3)

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{U}\mathbf{Z}_v + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (3)$$

kus \mathbf{Z}_p , \mathbf{Z}_v on tala lõpus ja alguses olevad siirded ning sisejõud (4)

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \\ \dots \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \\ \dots \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_v, \quad (4)$$

\mathbf{U} – ülekan demaatriks (5)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -(x_p - x_v) & \vdots & \frac{(x_p - x_v)}{GA_Q} - \frac{(x_p - x_v)^3}{6EI_y} & -\frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} \\ 0 & 1 & \vdots & \frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} & \frac{(x_p - x_v)}{EI_y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & (x_p - x_v) & 1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ – koormusvektor.

Eemaldame võrranditest (3) siirded ja normaaljõudu (vt joonist 3) arvestavad liikmed, ning esitame võrrandid kujul (6).

Täis

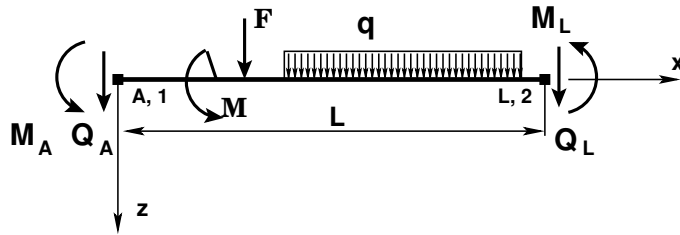


Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta



Joonis 3. Varda jõudude positiivsed suunad

Nimetame võrrandeid (6) *Gerberi tala põhivõrranditeks*.

$$\mathbf{I} * \mathbf{Z}_L - \mathbf{U} \mathbf{Z}_A = \mathring{\mathbf{Z}}, \quad (6)$$

ehk

$$\widehat{\mathbf{I}}\mathbf{U} * \widehat{\mathbf{Z}} = \mathring{\mathbf{Z}} \quad (7)$$

kus \mathbf{I} on (2x2) ühikmaatriks, $\widehat{\mathbf{I}}\mathbf{U}$ (2x4) maatriks, mida saab arvutada GNU Octave funktsiooniga yvspSTlvfmhvI.m,

$\widehat{\mathbf{Z}}$ (8) koosneb varda lõpus ja alguses olevatest kontaktjõududest.

$$\widehat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_L \\ \mathbf{Z}_A \end{bmatrix}, \quad (8)$$

siin \mathbf{Z}_L , \mathbf{Z}_A – varda lõpus ja alguses olevad kontaktjõud. (9)

$$\mathbf{Z}_L = \begin{bmatrix} Q_L \\ M_L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_A = \begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \end{bmatrix}, \quad (9)$$

kus U on ülekan demaatriks (10)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -x & -1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Koormusvektor $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ ühtlaselt jaotatud koormuse q puhul on (11),

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_q = \begin{bmatrix} -q_z * x \\ -q_z * x^2/2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Koormusvektor $\overset{\circ}{\mathbf{Z}}$ koondatud jõu korral (12)

$$\overset{\circ}{\mathbf{Z}}_F = \begin{bmatrix} -F_z (x - x_a)_+^o \\ -F_z * (x - x_a)_+ \end{bmatrix} \quad (12)$$

Ülekandemaatriksi (hõreda maatriksina) \mathbf{U} (10) saame arvutada GNU Octave funktsiooniga `yzSTlfhlin.m`.

Koormusvektoreid \mathbf{Z}_q , \mathbf{Z}_F saab arvutada GNU Octave funktsioonidega `yzSThqz.m`, `yzSTfzv.m`

`ESTSTKrmus.m` kasutab funktsioone `yzSThqz.m`, `yzSTfzv.m`.

Täis



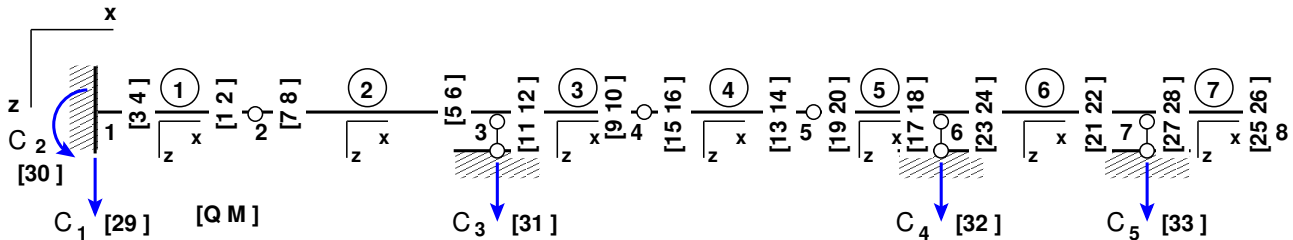
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Raami põhivõrrandid



Joonis 4. Gerberi tala EST nummerdus

Tala põhivõrrandite arv $n = 2 * n_{elementi} = 2 * 7 = 14$, milles on $4 * 7 = 28$ tundmatut.

Võrrandisüsteemi struktuur (joonis 5).

Täis

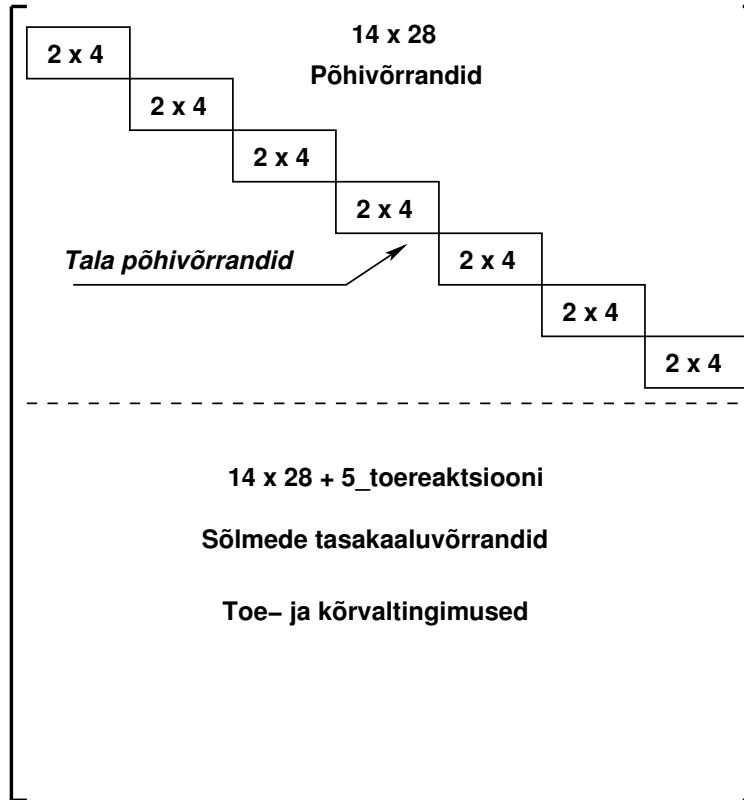


Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta



Joonis 5. Võrrandisüsteemi kordajate struktuur

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Programm põhivõrrandite koostamiseks:

```
IIv=0;
IJv=0;
%
for i=1:NEARV
    krda=i;
    Li=lvarras(i,1);
    Fjoud=esFjoud(:,1:2,i);
    qkoormus=esQkoormus(:,1:3,i);
    spvF=yspSTlvfmhvI(Li,Li); % võrrandisüsteemi kordajad
    vB=ESTSTKrmus(Li,Li,Fjoud,qkoormus); % võrrandisüsteemi vabaliikmed
    IIv=krda*2-1;
    IJv=krda*4-3;
    spA=spInsertBtoA(spA,IIv,IJv,spvF);
    B=InsertBtoA(B,NNK,1,IIv,1,vB,2,1);
endfor
```

Põhivõrrandite kordajate väljatrükk:

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 14, cols = 28, nnz = 35)



12/28

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Element 1

 $(1, 1) \rightarrow 1$
 $(2, 2) \rightarrow 1$
 $(1, 3) \rightarrow 1$
 $(2, 3) \rightarrow 4$
 $(2, 4) \rightarrow 1$

Element 2

 $(3, 5) \rightarrow 1$
 $(4, 6) \rightarrow 1$
 $(3, 7) \rightarrow 1$
 $(4, 7) \rightarrow 8$
 $(4, 8) \rightarrow 1$

Element 3

 $(5, 9) \rightarrow 1$
 $(6, 10) \rightarrow 1$
 $(5, 11) \rightarrow 1$
 $(6, 11) \rightarrow 2$
 $(6, 12) \rightarrow 1$

Element 4

 $(7, 13) \rightarrow 1$
 $(8, 14) \rightarrow 1$
 $(7, 15) \rightarrow 1$
 $(8, 15) \rightarrow 6$
 $(8, 16) \rightarrow 1$

Element 5

 $(9, 17) \rightarrow 1$
 $(10, 18) \rightarrow 1$
 $(9, 19) \rightarrow 1$
 $(10, 19) \rightarrow 2$
 $(10, 20) \rightarrow 1$

Element 6

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

(11, 21) -> 1
(12, 22) -> 1

(11, 23) -> 1
(12, 23) -> 8

(12, 24) -> 1

Element 7

(13, 25) -> 1
(14, 26) -> 1

(13, 27) -> 1
(14, 27) -> 1

(14, 28) -> 1



14/28

Täis



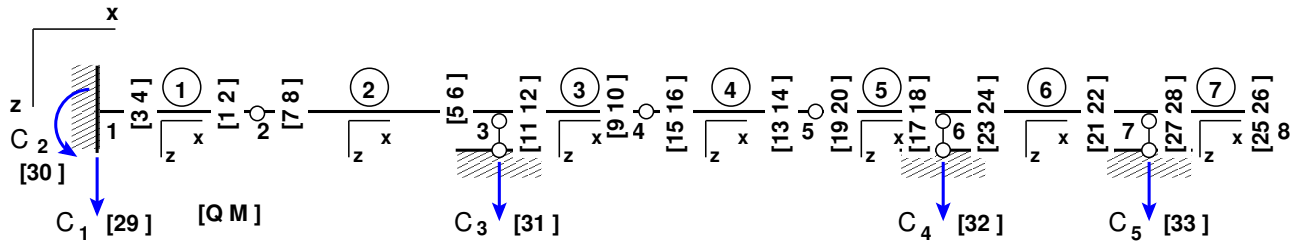
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Raami sõlmede tasakaal



Joonis 6. Raami sõlmede tasakaal

Sõlm 1 on tasakaalus (toereaktsioonid $C_1 \equiv Z_{29}$, $C_2 \equiv Z_{30}$)

$$^{15} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{29} \\ Z_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Sõlm 2 on tasakaalus

$$^{17} [1.0] [Z_1] + [1.0] [Z_7] = [20.0] \quad (14)$$

Täis

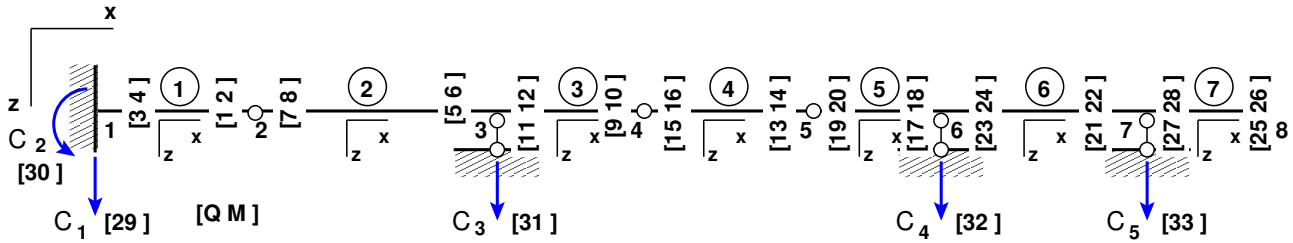


Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta



Joonis 7. Raami sõlmede tasakaal

Sõlm 3 on tasakaalus (toereaktsioon $C_3 \equiv Z_{31}$)

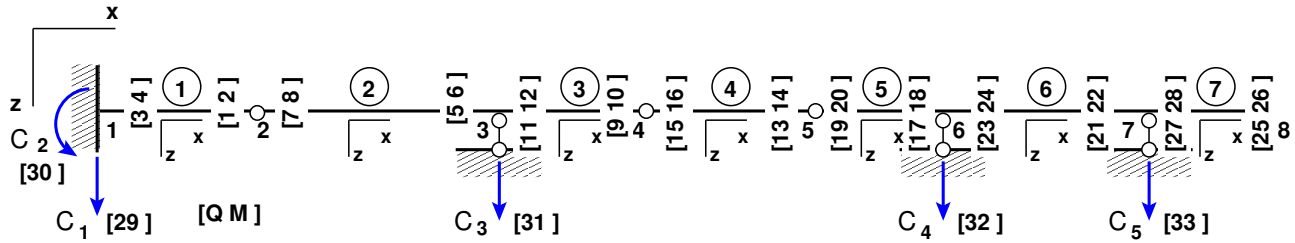
$$\begin{matrix} 18 \\ 19 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_5 \\ Z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{11} \\ Z_{12} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \end{bmatrix} [Z_{31}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Sõlm 4 on tasakaalus

$${}^{20} [1.0] [Z_9] + [1.0] [Z_{15}] = [0.0] \quad (16)$$

Sõlm 5 on tasakaalus

$${}^{21} [1.0] [Z_{13}] + [1.0] [Z_{19}] = [0.0] \quad (17)$$



Joonis 8. Raami sõlmede tasakaal

Sõlm 6 on tasakaalus (toereaktsioon $C_4 \equiv Z_{32}$)

$$\begin{matrix} 22 \\ 23 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{17} \\ Z_{18} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{23} \\ Z_{24} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \end{bmatrix} [Z_{32}] = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Sõlm 7 on tasakaalus (toereaktsioon $C_5 \equiv Z_{33}$)

$$\begin{matrix} 24 \\ 25 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{21} \\ Z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{27} \\ Z_{28} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0 \end{bmatrix} [Z_{33}] = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Sõlm 8 on tasakaalus

$$\begin{matrix} 26 \\ 27 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{21} \\ Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Arvutiprogrammis kasutame tasakaaluvõrrandite sisestamiseks GNU Octave funktsiooni spInsertBtoA.m ja spSisestaArv.m



18/28

=====

% %Sõlmede tasakaaluvõrrandid 15-27

=====

```
spA=spInsertBtoA(spA,15,3,spT1);    % tala 1 algus
spA=spSisestaArv(spA,15,29,-1);    % toereaktsioon C1
spA=spSisestaArv(spA,16,30,-1);    % toereaktsioon C2
B(15:16,1)=s1F(1:2,1);             % sõlme 1 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,17,1,spT12);  spA=spInsertBtoA(spA,17,7,spT22);
B(17:17,1)=s2F(1:1,1);             % sõlme 2 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,18,5,spT2);   spA=spInsertBtoA(spA,18,11,spT3);
spA=spSisestaArv(spA,18,31,-1);    % toereaktsioon C3
B(18:19,1)=s3F(1:2,1);             % sõlme 3 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,20,9,spT32);  spA=spInsertBtoA(spA,20,15,spT42);
B(20:20,1)=s4F(1:1,1);             % sõlme 4 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,21,13,spT42); spA=spInsertBtoA(spA,21,19,spT52);
B(21:21,1)=s5F(1:1,1);             % sõlme 5 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,22,17,spT5);  spA=spInsertBtoA(spA,22,23,spT6);
spA=spSisestaArv(spA,22,32,-1);    % toereaktsioon C4
B(22:23,1)=s6F(1:2,1);             % sõlme 6 koormus
spA=spInsertBtoA(spA,24,21,spT6);  spA=spInsertBtoA(spA,24,27,spT7);
spA=spSisestaArv(spA,24,33,-1);    % toereaktsioon C5
B(24:25,1)=s3F(1:2,1);             % sõlme 7 koormus
spA=spSisestaArv(spA,26,25,1);    % kontaktjõud sõlmes 8
```

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

```

spA=spSisestaArv(spA,27,26,1);      % kontaktjõud sõlmes 8
B(26:27,1)=s8F(1:2,1);             % sõlme 8 koormus
  
```

Konstruksiooni tasakaaluvõrrandite väljatrükk on need kordajad järgmised:

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 27, cols = 33, nnz = 27)

(17, 1) -> 1	(18, 11) -> 1	(24, 21) -> 1	(25, 28) -> 1
(15, 3) -> 1	(19, 12) -> 1	(25, 22) -> 1	(15, 29) -> -1
(16, 4) -> 1	(21, 13) -> 1	(22, 23) -> 1	(16, 30) -> -1
(18, 5) -> 1	(20, 15) -> 1	(23, 24) -> 1	(18, 31) -> -1
(19, 6) -> 1	(22, 17) -> 1	(26, 25) -> 1	(22, 32) -> -1
(17, 7) -> 1	(23, 18) -> 1	(27, 26) -> 1	(24, 33) -> -1
(20, 9) -> 1	(21, 19) -> 1	(24, 27) -> 1	

Täis



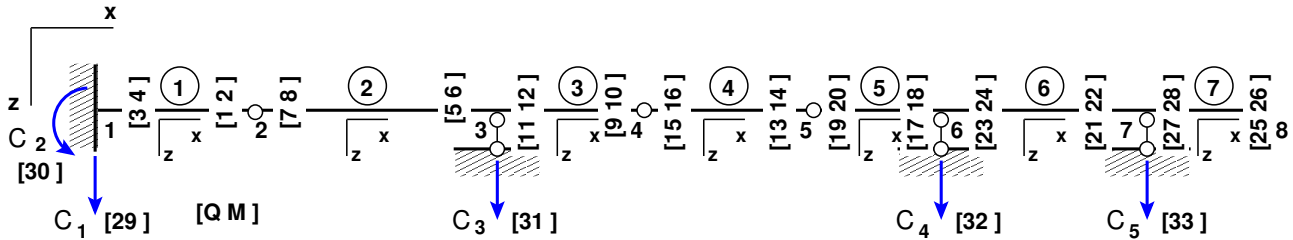
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Raami kõrvalingimused



Joonis 9. Raami kõrvalingimused

Sõlmed 2, 4 ja 5

$$\begin{array}{l}
 28 \\
 29 \\
 30 \\
 31 \\
 32 \\
 33
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 Z_2 \\
 Z_8 \\
 Z_{10} \\
 Z_{16} \\
 Z_{14} \\
 Z_{20}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0.0 \\
 0.0 \\
 0.0 \\
 0.0 \\
 0.0 \\
 0.0
 \end{bmatrix}
 \quad (21)$$

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Arvutiprogrammis kasutame tasakaaluvõrrandite sisestamiseks GNU Octave funktsiooni spSisestaArv.m



```
=====
% Kõrvaltingimused 28-33
=====
spA=spSisestaArv(spA,28,2,1);      % kõrvaltingimus sõlmes 2
spA=spSisestaArv(spA,29,8,1);     % kõrvaltingimus sõlmes 2
spA=spSisestaArv(spA,30,10,1);    % kõrvaltingimus sõlmes 4
spA=spSisestaArv(spA,31,16,1);    % kõrvaltingimus sõlmes 4
spA=spSisestaArv(spA,32,14,1);    % kõrvaltingimus sõlmes 5
spA=spSisestaArv(spA,33,20,1);    % kõrvaltingimus sõlmes 5
B(28:33,1)=0.0;
```

Konstruktsiooni tasakaaluvõrrandite väljatrükkis on need kordajad järgmised:

spA =

Compressed Column Sparse (rows = 33, cols = 20, nnz = 6)

(28, 2) -> 1	(32, 14) -> 1
(29, 8) -> 1	(31, 16) -> 1
(30, 10) -> 1	(33, 20) -> 1

Täis

◀◀

▶▶

◀

▶

Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Hõreda võrrandisüsteemi (22)



$$\mathbf{spA} * \mathbf{Z} = \mathbf{B} \quad (22)$$

lahendame GNU Octavega järgmise käsuga:

```
Z=spA\B; % Võrrandisüsteemi spA*Z=B lahend
```

Raami toereaktsioonid:

29	-5.900e+01	32	-9.000e+01
30	2.360e+02	33	-6.400e+01
31	-1.250e+02		

Varraste algparameetrid on järgmised:

=====

Algparameetrid

Varda Nr	Q	M
1	-59.000	236.000
2	-39.000	0.000
3	-60.000	104.000
4	-44.000	0.000
5	34.000	0.000
6	-56.000	68.000
7	-20.000	20.000

Täis

◀◀

▶▶

◀

▶

Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Siirded ja sisejõud ristlõikes leiame avaldisega (23)

$$\mathbf{Z}_x = \mathbf{U}\mathbf{Z}_A + \overset{\circ}{\mathbf{Z}} \quad (23)$$

kus \mathbf{Z}_x on kontaktjõud ristlõikes x , \mathbf{Z}_A – algparameetrid.

Väljavõte programmist siirete ja sisejõudude arvutamiseks.

```
% Nmitmeks=4
for i=1:NEARV
    krda=i;
    vF=zeros(2,4);
    Li=lvarras(i,1);
    Fjoud=esFjoud(:,1:2,i);
    qkoormus=esQkoormus(:,1:3,i);
    xsamm=Li/Nmitmeks; % varda neljandikel sisejõud
    xx=0;
    AP=AlgPar(i,:)';
    %
    for ij=1:Nmitmeks+1 % 5 - sisejõud ka varda algul
        vvF=ylSTfhlin(xx);
        vvB=ESTSTKrmus(xx,Li,Fjoud,qkoormus);
        Fvv(:,ij)=vvF*AP+vvB;
        xx=xx+xsamm;
    endfor
% Järgneb väljatrükk
```

```

VardaNr=i;
disp(sprintf('%15s %2i %16s %8.5f %28s', 'Sisejõud vardas',VardaNr,
'varda pikkus on',Li,' varras on jaotatud viieks'))
for i=1:2
disp(sprintf('%10s %8.3f %8.3f %8.3f%8.3f %8.3f %8.3f',
suurused(i,:), Fvv(i,1), Fvv(i,2), Fvv(i,3), Fvv(i,4), Fvv(i,5),
Fvv(i,6)))
endfor
endfor
%
```

Täis



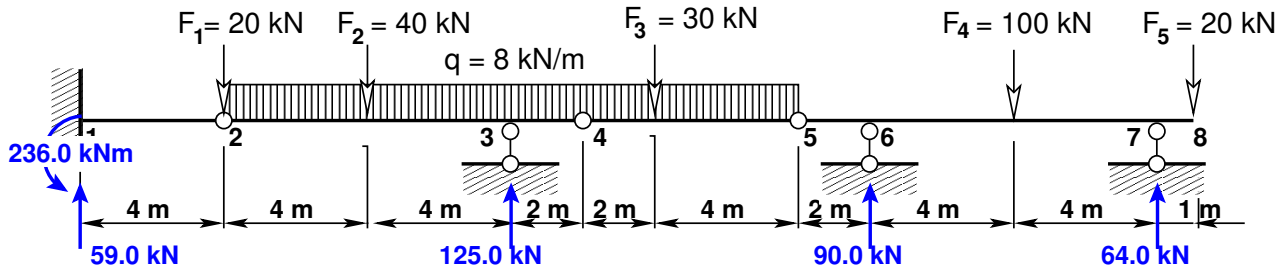
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Tala staatikaline kontroll



Joonis 10. Gerberi tala staatikaline kontroll

$$\begin{aligned} \Sigma Z = 0; & \quad 20 + 40 + 30 + 100 + 20 + 8.0 * 16.0 - \\ & \quad - 59.0 - 125.0 - 90.0 - 64.0 = 0 \\ \Sigma M_1 = 0; & \quad 236.0 + 125.0 * 12 + 90.0 * 22 + 64.0 * 30 - \\ & \quad - 20 * 4 - 40 * 8 - 30 * 16 - 100 * 26 - 20 * 31 - \\ & \quad - 8 * 16 * (8 + 4) = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Täis



Tagasi

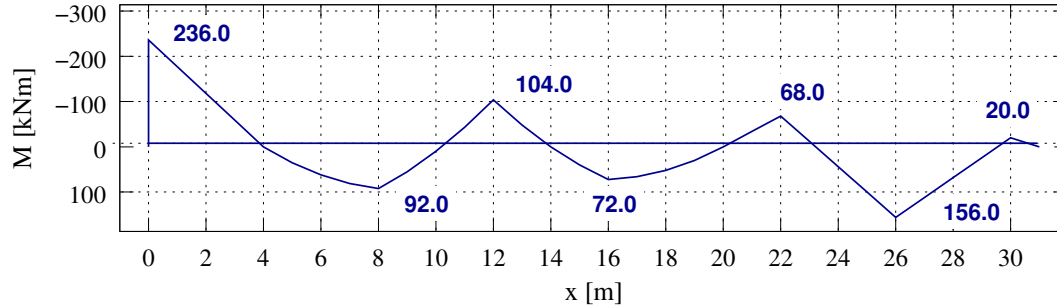
Edasi

Sulge

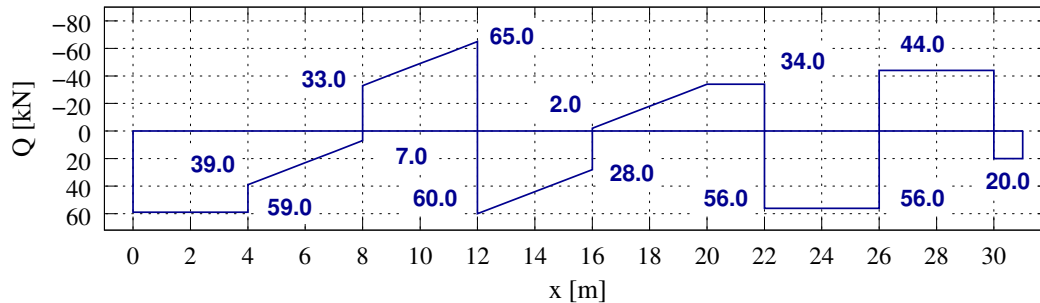
Lõpeta

Tala pöikjõu ja paindemomendi epüür

Gerberi tala 3.2.3 A; Paindemoment M



Gerberi tala 3.2.3 A; Pöikjõud Q



Joonis 11. Gerberi tala sisejõud

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Viited

1. EST meetod:

A. Lahe. The transfer matrix and the boundary element method, Proc. Estonian Acad. Sci. Engng., 1997, 3, 1. p. 3–12. ¹

2. Raami arvutamise programm EST meetodiga:

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/spGerberTalaESTR.m>

Kasutab funktsioone:

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/yspSTlvmhvI.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/yspSTlfhlin.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/yzSThqz.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/yzSTfzv.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/ESTSTKrmus.m>

¹http://books.google.ee/books?id=ghco7svk5T4C&pg=PA3&lpg=PA3&dq=Andres+Lahe&source=bl&ots=3SFfo4UCES&sig=_XLUez-SfW2FVYGRx8v2LVm16V8&hl=et&ei=YQaFTMeIEoWc00yCyNwP&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=5&ved=OCBOQ6AEwBDgK#v=onepage&q=Andres%20Lahe&f=false

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/spInsertBtoA.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/spSisestaArv.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/ylSTfhlin.m>

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammID/InsertBtoA.m>

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta