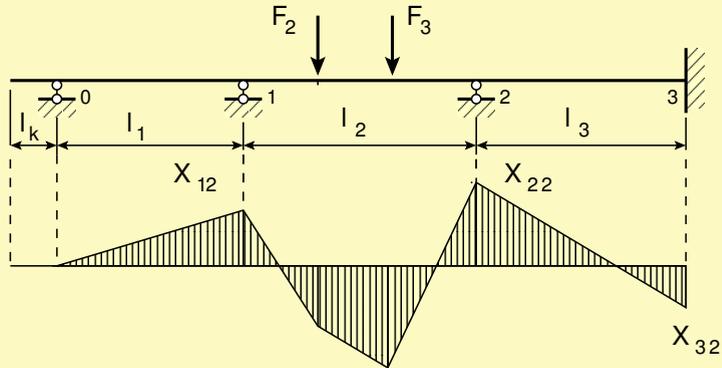


Ehitusmehaanika. Jätkuvtala

Fookussuhetega arvutamine



Andres Lahe
 Mehaanikainstituut
 Tallinna Tehnikaülikool

Tallinn 2011



See teos on litsentseeritud Creative Commonsi Autorile viitamine + Jagamine samadel tingimustel 3.0 Estonia litsentsiga.

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Sisukord

1	Sissejuhatus	3
2	Fookussuhted	6
3	Koormatud silde toemomendid	10
4	Näide	14
5	Koormus kolmandal sildel	17
6	Koormus teisel sildel	19
7	Koormus esimesel sildel	22
8	Koormus konsoolil	24
9	Viited	27

Täis



Tagasi

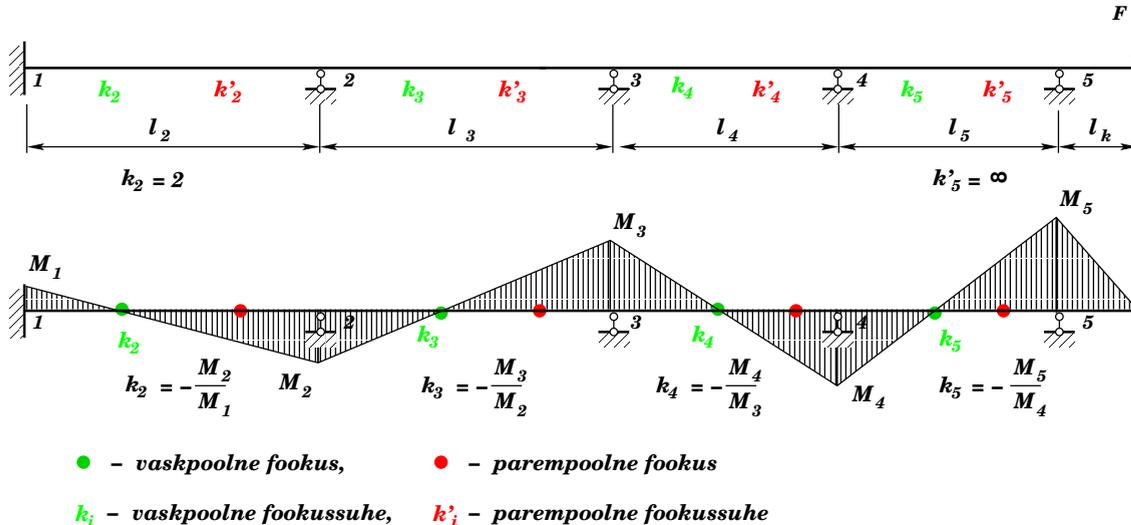
Edasi

Sulge

Lõpeta

Sissejuhatus

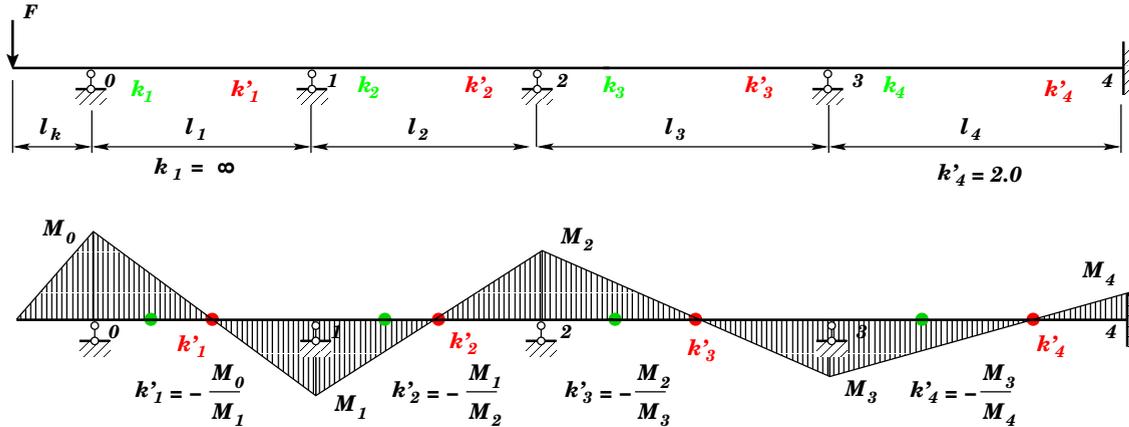
Joonisel 1 alustame momendist M_5 ja arvutame vasakpoolsete fookussuhetega¹ k_i momentid M_4 , M_3 , M_2 ja M_1 .



Joonis 1. Vasakpoolsete fookussuhtetega arvutamine

¹<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammide/FStekst.txt>

Joonisel 2 alustame momendist M_0 ja arvutame parempoolsete fookussuhetega k'_i momentid M_1, M_2, M_3 ja M_4 .



- - vaskpoolne fookus, ● - parempoolne fookus
- k_i - vaskpoolne fookussuhe, k'_i - parempoolne fookussuhe

Joonis 2. Parempoolsete fookussuhtetega arvutamine

²<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammide/FStekst.txt>

Täis

◀

▶

◀

▶

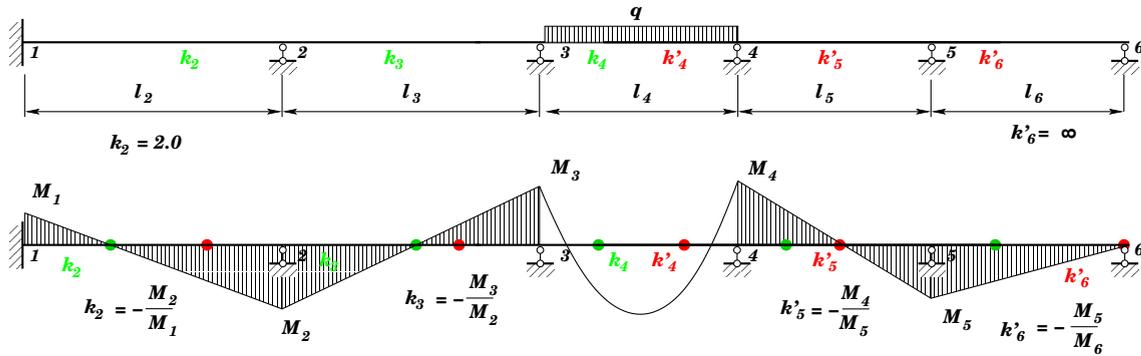
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Joonisel 3 alustame momendist M_3 ja arvutame vaskpoolsete fookussuhetega k_i ; momentid M_2 ja M_1 . Alustame momendist M_4 ja arvutame parempoolsete fookussuhetega k'_i momentid M_5 ja $M_6 = 0.0$.



- - vaskpoolne fookus, ● - parempoolne fookus
- k_i - vaskpoolne fookussuhe, k'_i - parempoolne fookussuhe

Joonis 3. Fookussuhtega arvutamine

Täis



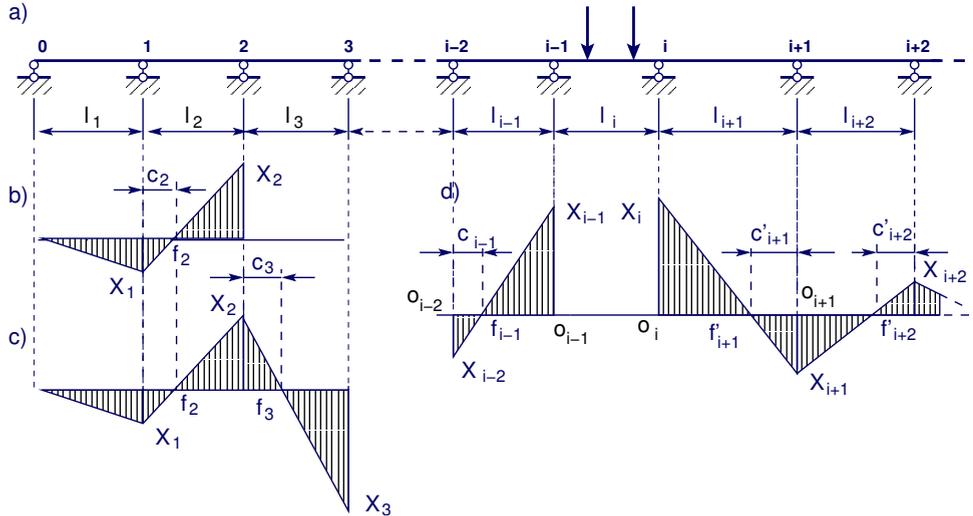
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Fookussuhted



Joonis 4. Jätkuvtala fookussuhted

Vasakpoolne fookussuhe (vt joonist 4 d))

$$k_{i-1} = \frac{(l_{i-1} - c_{i-1})}{c_{i-1}} \quad (1)$$

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Parempoolne fookussuhe (vt joonist 4 d))

$$k'_{i+1} = \frac{(l_{i+1} - c'_{i+1})}{c'_{i+1}} \quad (2)$$

Sõlme 1 kohta on kolme momendi võrrand

$$l'_1 X_0 + 2(l'_1 + l'_2) X_1 + l'_2 X_2 = 0 \quad (3)$$

siin $X_0 = 0$ ja

$$2(l'_1 + l'_2) X_1 + l'_2 X_2 = 0 \quad (4)$$

ning

$$\frac{X_2}{X_1} = -\frac{2(l'_1 + l'_2)}{l'_2} = -k_2 \quad (5)$$

Sõlme 2 kohta on kolme momendi võrrand

$$l'_2 X_1 + 2(l'_2 + l'_3) X_2 + l'_3 X_3 = 0 \quad (6)$$

Võrrandist (5) avaldame $X_1 = -\frac{X_2}{k_2}$ ja asetame võrrandisse (6)

$$-l'_2 \frac{X_2}{k_2} + 2(l'_2 + l'_3) X_2 + l'_3 X_3 = 0 \quad (7)$$

Siit saame

$$\frac{X_3}{X_2} = - \left[2 + \frac{l'_2}{l'_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) \right] = -k_3 \quad (8)$$

Sõlme 3 kohta saame

$$l'_3 X_2 + 2(l'_3 + l'_4) X_3 + l'_4 X_4 = 0 \quad (9)$$

Võrrandist (8) avaldame $X_2 = -\frac{X_3}{k_3}$ ja asetame võrrandisse (9)

$$-l'_3 \frac{X_3}{k_3} + 2(l'_3 + l'_4) X_3 + l'_4 X_4 = 0 \quad (10)$$

Siit saame

$$\frac{X_4}{X_3} = - \left[2 + \frac{l'_3}{l'_4} \left(2 - \frac{1}{k_3} \right) \right] = -k_4 \quad (11)$$

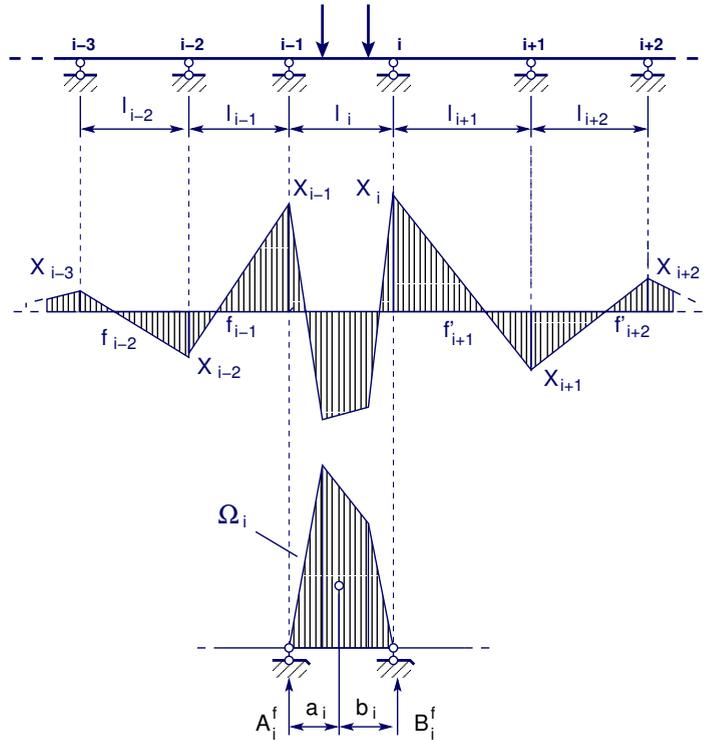
Üldistame saadud avaldised (5), (8) ja (11). Vasakpoolseteks fookussuheteks on avaldis (12)

$$k_j = 2 + \frac{l'_{j-1}}{l'_j} \left(2 - \frac{1}{k_{j-1}} \right), \quad X_{j-1} = -\frac{X_j}{k_j} \quad (12)$$

Samamoodi saadakse valem ka parempoolsete fookussuhete arvutamiseks

$$k'_j = 2 + \frac{l'_{j+1}}{l'_j} \left(2 - \frac{1}{k'_{j+1}} \right), \quad X_j = -\frac{X_{j-1}}{k'_j} \quad (13)$$

Koormatud silde toemomendid



Joonis 5. Jätkuvtala toemomendid

Joonisel 5 esitatud tala tugede $i-1$ ja i kohta kirjutame kolme momendi võrrandi

$$\begin{aligned} l'_{i-1}X_{i-2} + 2(l'_{i-1} + l'_i)X_{i-1} + l'_iX_i &= -6A_i^f \frac{I_0}{I_i} \\ l'_iX_{i-1} + 2(l'_i + l'_{i+1})X_i + l'_{i+1}X_{i+1} &= -6B_i^f \frac{I_0}{I_i} \end{aligned} \quad (14)$$

Võrranditest (14) elimineerime valemite (12) ja (13) abil momendid X_{i-2} ja X_{i+1}

$$X_{i-2} = -\frac{X_{i-1}}{k_{i-1}}, \quad X_{i+1} = -\frac{X_i}{k'_{i+1}} \quad (15)$$

Arvestades seoseid (15), esitame võrrandisüsteemi (14) järgmisel kujul:

$$\begin{bmatrix} 2 + \frac{l'_{i-1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k_{i-1}}\right) & 1 \\ 1 & 2 + \frac{l'_{i+1}}{l'_i} \left(2 - \frac{1}{k'_{i+1}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i-1} \\ X_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 6A_i^f \frac{I_0}{I_i l'_i} \\ 6B_i^f \frac{I_0}{I_i l'_i} \end{bmatrix} \quad (16)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} k_i & 1 \\ 1 & k'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{i-1} \\ X_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{6A_i^f}{l_i} \\ \frac{6B_i^f}{l_i} \end{bmatrix} \quad (17)$$

siin

$$l'_i = l_i * \frac{I_0}{I_i} \quad (18)$$

s.t koormusliikmetes ei ole redutseeritud pikkused.
Võrrandisüsteemi (17) lahend ja toemomendid on

$$X_{i-1} = -\frac{6A_i^f k'_i - 6B_i^f}{l_i (k_i k'_i - 1)} \quad (19)$$

$$X_i = -\frac{6B_i^f k_i - 6A_i^f}{l_i (k_i k'_i - 1)} \quad (20)$$

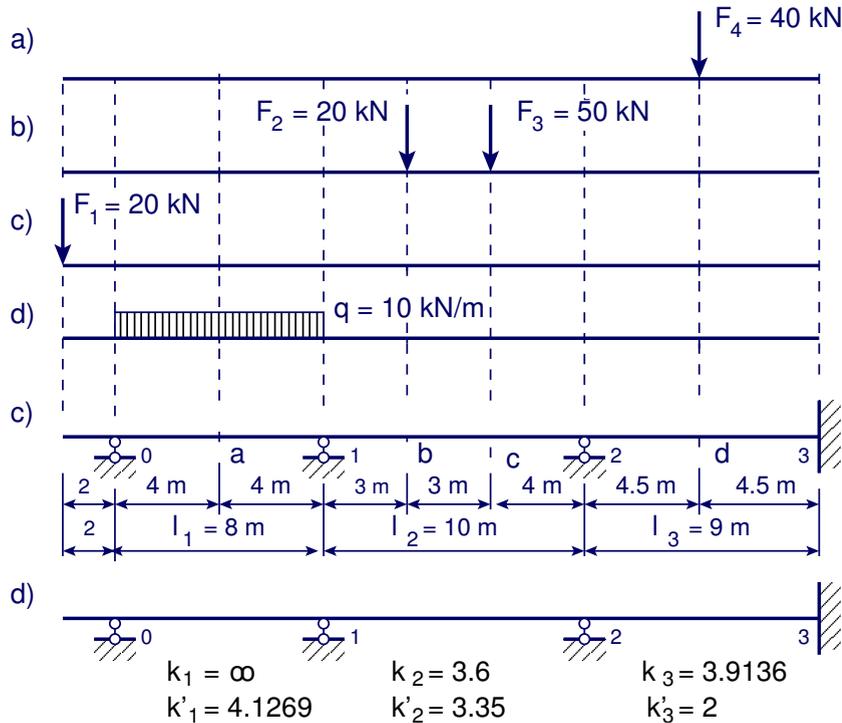
Kui äärmised toed on liigendoed (s.t $k_i = \infty$, $k'_i = \infty$), siis avaldiste

(19), (20) kasutamisel tekib määramatus $\frac{\infty}{\infty}$ ning see tuleb avada

$$\begin{aligned} k'_n = \infty; \quad X_n = 0; \quad X_{n-1} &= -\frac{6A_n^f k'_n - 6B_n^f}{l_n (k_n k'_n - 1)} * \frac{\frac{1}{k'_n}}{\frac{1}{k_n}} = \\ &= -\frac{6A_n^f - \frac{6B_n^f}{k'_n}}{l_n \left(k_n - \frac{1}{k'_n}\right)} = -\frac{6A_n^f}{l_n k_n} \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_1 = \infty; \quad X_0 = 0; \quad X_1 &= -\frac{6B_1^f k_1 - 6A_1^f}{l_1 (k_1 k'_1 - 1)} * \frac{\frac{1}{k_1}}{\frac{1}{k'_1}} = \\ &= -\frac{6B_1^f - \frac{6A_1^f}{k_1}}{l_1 \left(k'_1 - \frac{1}{k_1}\right)} = -\frac{6B_1^f}{l_1 k'_1} \quad (22) \end{aligned}$$

Näide



Joonis 6. Jätkuvtala. Fookussuhted

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Arvutada joonisel 6 c) esitatud jätkuvtala toemomendid fookussuhtega ning kujutada paindemomendi ja põikjõu epüürid. Andmed: $l_1 = 8\text{ m}$, $l_2 = 10\text{ m}$, $l_3 = 9\text{ m}$. Sillete ristlõikejäikused $EI = \textit{konst}$.

Tala on koormatud ajutise koormusega sillete kaupa:

1. koormusvariant: koormatud on kolmas sille $F_4 = 40\text{ kN}$ (joonis 6 a));
2. koormusvariant: koormatud on teine sille $F_2 = 20\text{ kN}$ ja $F_3 = 50\text{ kN}$ (joonis 6 b));
3. koormusvariant: koormatud on konsool $F_1 = 20\text{ kN}$ (joonis 6 c));
4. koormusvariant: koormatud on esimene sille $q = 10\text{ kN/m}$ (joonis 6 d)).

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Fookussuhted³ arvutame valemitega (12) ja

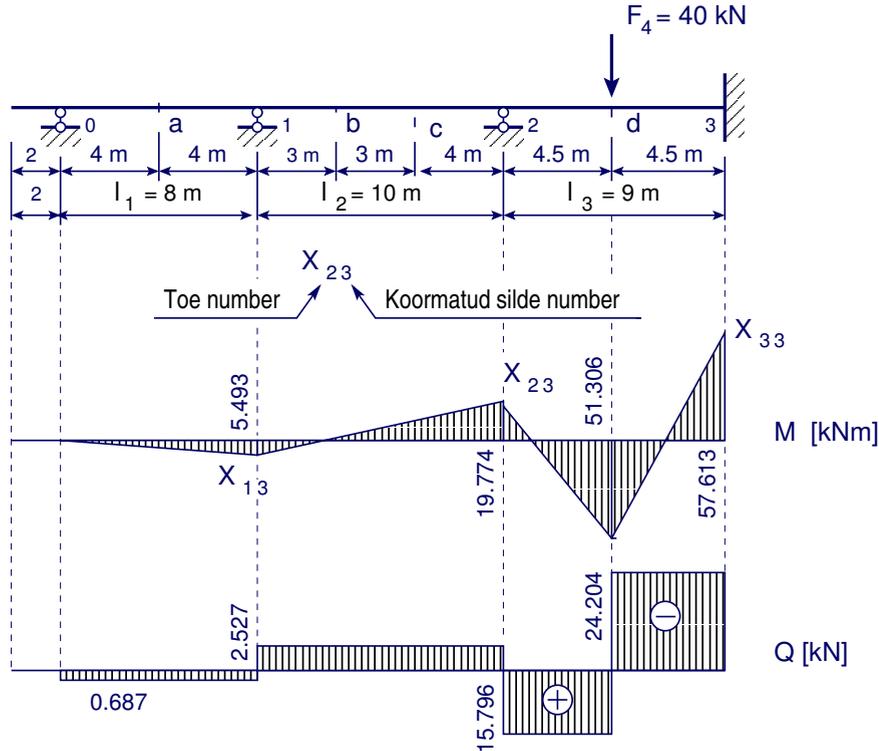
$$\begin{aligned}k_1 &= \infty \\k_2 &= 2 + \frac{l_1}{l_2} \left(2 - \frac{1}{k_1} \right) = 2 + \frac{8}{10} \left(2 - \frac{1}{\infty} \right) = 3.6 \\k_3 &= 2 + \frac{l_2}{l_3} \left(2 - \frac{1}{k_2} \right) = 2 + \frac{10}{9} \left(2 - \frac{1}{3.6} \right) = 3.9136\end{aligned}\quad (23)$$

(13) (parempoolsed fookussuhted)

$$\begin{aligned}k'_3 &= 2 \\k'_2 &= 2 + \frac{l_3}{l_2} \left(2 - \frac{1}{k'_3} \right) = 2 + \frac{9}{10} \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 3.35 \\k'_1 &= 2 + \frac{l_2}{l_1} \left(2 - \frac{1}{k'_2} \right) = 2 + \frac{10}{8} \left(2 - \frac{1}{3.35} \right) = 4.1269\end{aligned}\quad (24)$$

³<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammide/FStekst.txt>

Koormus kolmandal sildel



Joonis 7. Fookussuhted. Koormus kolmandal sildel

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Kolmanda silde koormamisel tekkinud toemomendid arvutame valemitega (19) ja (20). Nendes esinevad koormusliikmed $6A_i^f$, $6B_i^f$ on juba leitud eelmises näites.

$$\begin{aligned} X_{23} &= -\frac{6A_3^f k'_3 - 6B_3^f}{l_3 (k_3 k'_3 - 1)} = -\frac{1215 * 2 - 1215}{9 * (3.9136 * 2 - 1)} = \\ &= -19.774 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} X_{33} &= -\frac{6B_3^f k_3 - 6A_3^f}{l_3 (k_3 k'_3 - 1)} = -\frac{1215 * 3.9136 - 1215}{9 * (3.9136 * 2 - 1)} = \\ &= -57.613 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (26)$$

Toemomendi X_{13} leiame vasakpoolse fookussuhtega (12)

$$X_{13} = -\frac{X_{23}}{k_2} = \frac{19.774}{3.6} = 5.493 \text{ kNm} \quad (27)$$

Kolmanda ava keskel oleva paindemomendi epüüri ordinaadi arvutamiseks kasutame avaldist (28).

$$\begin{aligned} M_d &= M_d^o + X_2 * \xi'_d + X_3 * \xi_d = 20 * 4.5 - 19.774 * 0.5 - \\ -57.613 * 0.5 &= 51.306 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (28)$$

Täis



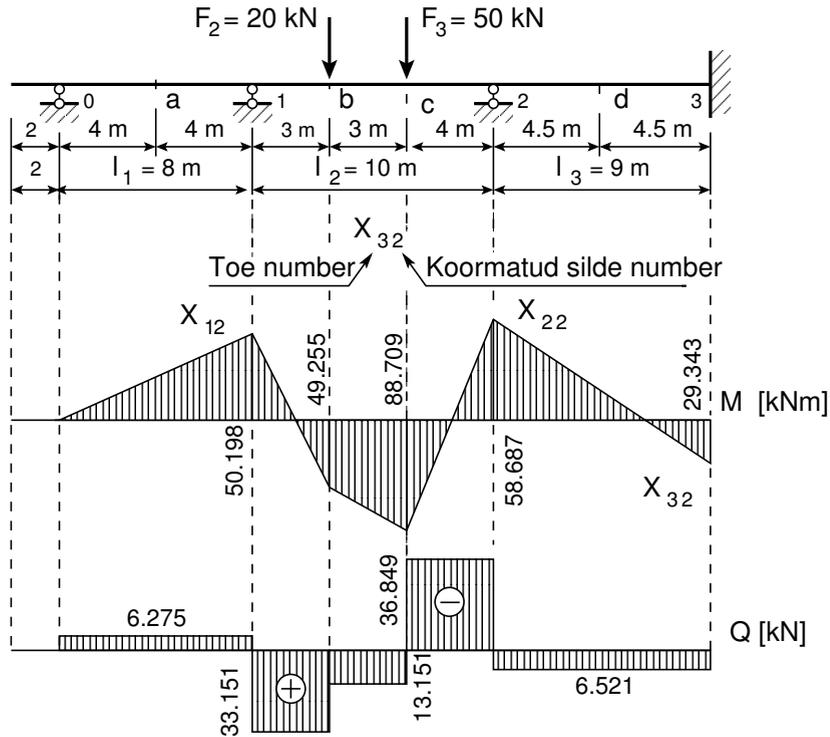
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Koormus teisel sildel



Joonis 8. Fookussuhted. Koormus teisel sildel

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Teise silde koormamisel tekkinud toemomendid arvutame valemitega (19) ja (20).

$$\begin{aligned} X_{12} &= -\frac{6A_2^f k_2' - 6B_2^f}{l_2 (k_2 k_2' - 1)} = -\frac{2394 * 3.35 - 2468}{10 * (3.6 * 3.35 - 1)} = \\ &= -50.198 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} X_{22} &= -\frac{6B_2^f k_2 - 6A_2^f}{l_2 (k_2 k_2' - 1)} = -\frac{2468 * 3.6 - 2394}{10 * (3.6 * 3.35 - 1)} = \\ &= -58.687 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (30)$$

Parempoolse toemomendi X_{32} leiame parempoolse fookussuhtega (13)

$$X_{32} = -\frac{X_{22}}{k_3'} = \frac{58.687}{2} = 29.343 \text{ kNm} \quad (31)$$

Arvutame teise ava lihttala toereaktsioonid V_1 ja V_2 koormusest F_2 ja F_3 . Kasutame toereaktsioonide mõjujooni, siin on toereaktsiooni A_i jaoks $\eta_i = \xi_i'$ ja toereaktsiooni B_i jaoks $-\eta_i = \xi_i$).

$$\begin{aligned} V_1 &= F_2 * \xi_b' + F_3 * \xi_c' = 20 * 0.7 + 50 * 0.4 = 34 \text{ kN} \\ V_2 &= F_2 * \xi_b + F_3 * \xi_c = 20 * 0.3 + 50 * 0.6 = 36 \text{ kN} \end{aligned} \quad (32)$$

Teise ava ristlõigetes b ja c olevate paindemomendi epüüri ordinaatide arvutamiseks kasutame valemit (39).

$$M_b = M_b^o + X_1 * \xi'_b + X_2 * \xi_b = \quad (33)$$

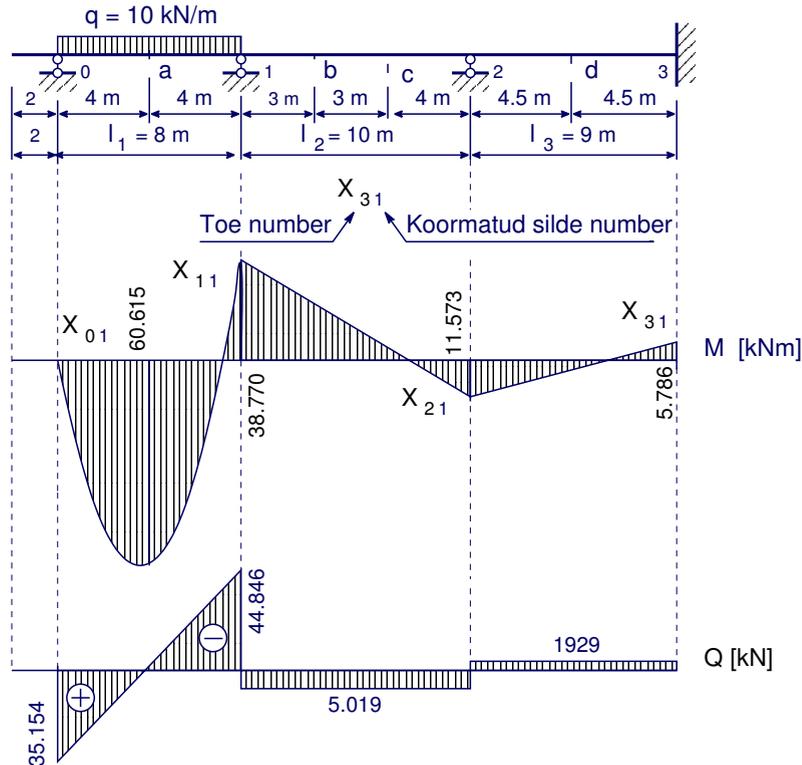
$$= 34 * 3.0 - 50.198 * 0.7 - 58.687 * 0.3 = 49.255 \text{ kNm}$$

$$M_c = M_s^o + X_1 * \xi'_b + X_2 * \xi_b = \quad (34)$$

$$= 36 * 4.0 - 50.198 * 0.4 - 58.687 * 0.6 = 88.709 \text{ kNm}$$



Koormus esimesel sildel



Joonis 9. Fookussuhted. Koormus esimesel sildel

Täis

◀

▶

◀

▶

Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Esimese ava koormamisel leiame momendi toel **1** X_{11} . Toel **0** on moment $X_{01} = 0$ ja vasakpoolne fookussuhe $k_1 = \infty$. Toereaktsiooni X_{11} määramiseks kasutame valemit (22). Fiktiivne toereaktsioon $6B_1^f = 1280 \text{ kNm}^2$ on leitud varem

$$X_{11} = -\frac{6B_1^f}{l_1 k_1'} = -\frac{1280}{8 * 4.1269} = -38.770 \text{ kNm} \quad (35)$$

Parempoolsed toemomendid leiame parempoolsete fookussuhetega (??)

$$X_{21} = -\frac{X_{11}}{k_2'} = -\frac{-38.770}{3.35} = 11.573 \text{ kNm}$$

$$X_{31} = -\frac{X_{21}}{k_3'} = -\frac{11.573}{2} = -5.786 \text{ kNm} \quad (36)$$

Esimese ava ristlõikes **a** oleva paindemomendi epüüri ordinaadi leidmiseks kasutame valemit (39).

$$M_a = M_a^o + X_0 * \xi_a' + X_1 * \xi_a = \frac{10 * 8^2}{8} - 0.0 * 0.5 - 38.770 * 0.5 = 60.515 \text{ kNm} \quad (37)$$

Täis

◀

▶

◀

▶

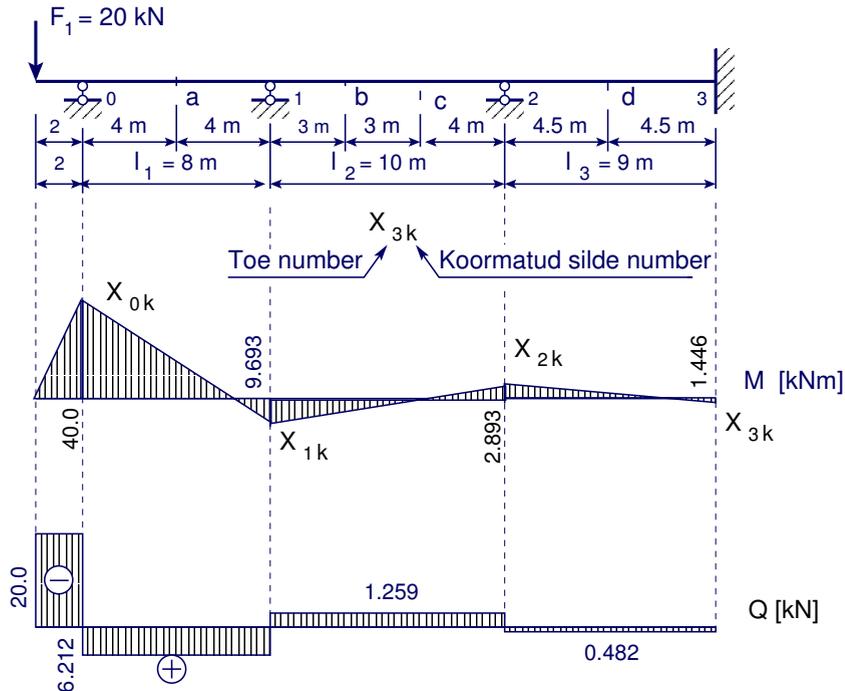
Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Koormus konsoolil



Joonis 10. Fookussuhted. Koormus konsoolil

Konsoolil mõjuv koormus tekitab toel 0 momendi $X_{0k} = -40 \text{ kNm}$

Täis

⏪

⏩

◀

▶

Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

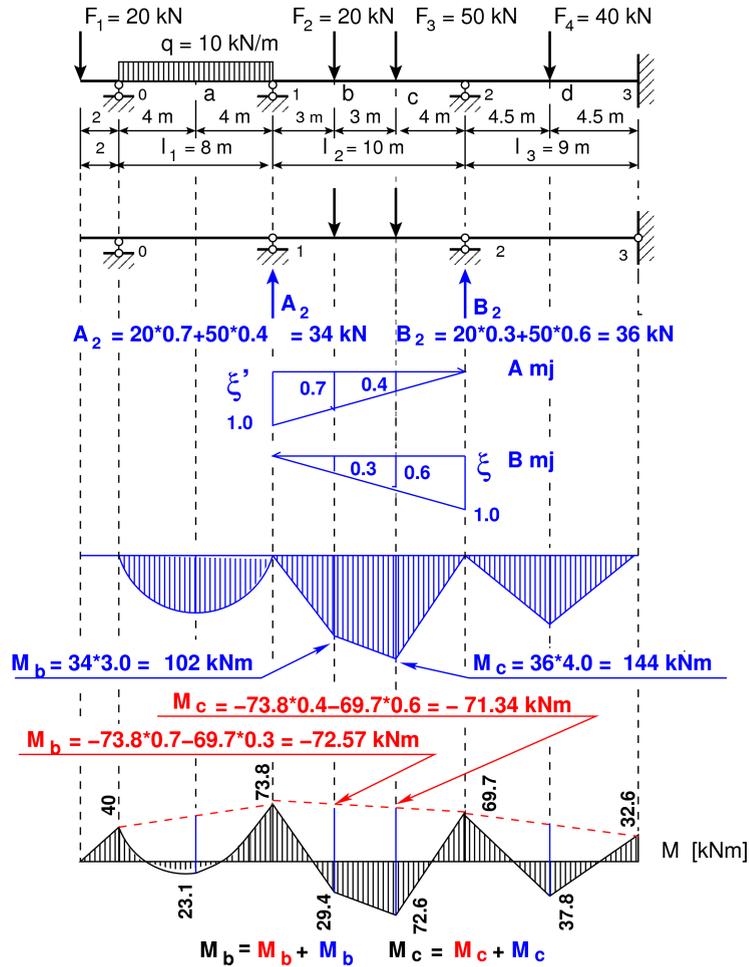
Parempoolsed toemomendid X_{ik} leiame parempoolse fookussuhtega (13).

$$\begin{aligned} X_{1k} &= -\frac{X_{0k}}{k'_1} = -\frac{-40.0}{4.1269} = 9.693 \text{ kNm} \\ X_{2k} &= -\frac{X_{1k}}{k'_2} = -\frac{9.693}{3.35} = -2.893 \text{ kNm} \\ X_{3k} &= -\frac{X_{2k}}{k'_3} = -\frac{-2.893}{2} = 1.446 \text{ kNm} \end{aligned} \quad (38)$$

$$M_k = M_k^o + X_{i-1} * \xi'_k + X_i * \xi_k \quad (39)$$

$$Q_k = Q_k^o + \frac{\Delta M}{\Delta x} \quad (40)$$





Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta

Viited

1. Jätkuvtalad:

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/varrassysteemid2.pdf#page=241>

2. Ülesanded iseseisvaks lahendamiseks:

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/ahtml/ylesanded1/node14.html>

3. Ülesanded arvutiga lahendamiseks:

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/ajuhend00/node19.html>

4. GNU Octave funtsioonidega jätkuvtala arvutamine:

<http://staff.ttu.ee/~alahe/konspekt/myCD/octaveProgrammide/FStekst.txt>

Täis



Tagasi

Edasi

Sulge

Lõpeta