

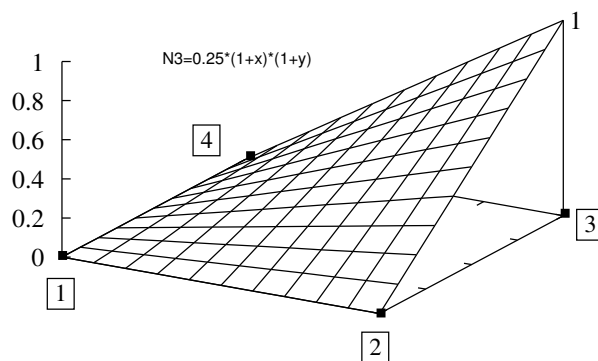


1918

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
MEHAANIKAINSTITUUT

Andres Lahe

Lõplike elementide meetod



Tallinn
2008

Õpevahend on vormindatud tekstitöötlusprogrammiga $\text{\LaTeX}$ (loe: lateh). Tekstitöötlusprogramm $\text{\LaTeX}$ on programmi $\text{\TeX}$ (loe: teh) makropakett. $\text{\TeX}$ erineb kirjastuste ssteemidest *VENTURA* ja *PageMaker* selle poolest, et ta on *public domain*'i produkt. $\text{\LaTeX}$ -is kirjutatud teksti on võimalik töödelda msdos, UNIX (Linux) ja teistel arvutitel. $\text{\LaTeX}$ disainib aruandeid, artikleid, raamatuid. Vastavad stiilifailid (*.sty failid) valivad pealkirjade suuruse, numeratsiooni, jooniste ja valemite paigutuse, aitavad koostada sisukorda, panevad indekseid, kirjandusviiteid jne.

Sisukord

1	Sissejuhatus	11
1.1	Lõplike elementide meetodi koht	11
1.2	Rajatingimused	14
1.3	Ligikaudsed lahendid	17
1.3.1	Lähendfunktsioonid	18
1.3.2	Lähendi vea määdu valik	18
1.3.3	Lähendamismeetod. Kaalutud hälvete meetod	19
2	Elastne vedrusüsteem	23
2.1	Elastse vedru jäikusmaatriks	23
2.2	Konstruktiooni jäikusmaatriks	24
2.3	Elastse vedru võimalik töö	26
2.4	Võrrandisüsteemi lahendamine	27
3	Varraskonstruktioonid	31
3.1	Varda pikke jäikusmaatriks	31
3.2	Kohalik ja üldteljestik	31
3.3	Jäikusmaatriks üldkoordinaatides	34
3.4	Elemendis mõjuv pikkejõud	37
3.5	Sõlmede nummerdamisest	41
3.6	Varda paine	42
3.6.1	Ülekandemaatriks paindel	42
3.6.2	Varda painde jäikusmaatriks	45
4	Interpoleerimine	47
4.1	Lagrange'i interpolatsioon	47
4.2	Hermite'i interpolatsioon	51
4.3	Interpoleerimine tasapinnal	54
4.3.1	Lagrange'i interpolatsioon tasapinnal	54
4.3.2	Hermite'i interpolatsioon tasapinnal	59
4.3.3	Kolmnurga pindalakoordinaadid	60
4.4	Interpoleerimine ruumis	63
4.4.1	Lagrange'i interpolatsioon ruumis	63
4.4.2	Ruumalakoordinaadid	64

5	Numbriline integreerimine	67
5.1	Sissejuhatavad märkused ja määrangud	67
5.2	Newtoni-Cotes'i valemid	69
5.3	Gaussi valemid	70
5.3.1	Gaussi valemid tasapinnal	72
5.4	Valemid $\mathcal{L}_i$ -koordinaatides	72
5.5	Gaussi-Radau skeem	74
5.6	Kolmnurkse elemendi kaalud	78
5.7	Näiteid numbrilisest integreerimisest	80
6	Isoparameetriline element	85
6.1	Koordinaatide teisendus	85
6.2	Konstantse tuletise kriteerium	87
6.3	Elementide kujutised ja originaalid	87
7	Elastusteooria tasandülesanne	91
7.1	Siirded ja deformatsioonid	91
7.2	Deformatsiooni pidevuse tingimus	92
7.3	Pinged kaldpinnal	94
7.4	Tasakaaluvõrrandid	95
7.5	Elastsusseosed. Elastsuskonstandid	96
7.6	Deformatsioonienergia	98
7.7	Võimaliku töö printsiip	103
7.8	Pingete arvutus	106
7.9	Näiteid koormuste taandamisest	107
8	Plaaditeooria	115
8.1	Üldosa	115
8.1.1	Põhimõisted	115
8.1.2	Plaatide paindeteooria hüpoteesid	116
8.2	Õhukeste plaatide paindeteooriast	116
8.2.1	Plaadi sisejõud	116
8.2.2	Plaadi tasakaaluvõrrandid	119
8.2.3	Plaadi deformatsioonid	121
8.2.4	Plaadi elastsusseosed	121
8.2.5	Plaadi diferentsiaalvõrrandid	123
8.2.6	Momendid ja põikjõud plaadi suvalises ristlõikes	123
8.2.7	Vektorarvutuste seoseid	125
8.2.8	Plaadi rajatingimustest	126
8.2.9	Virtuaalsiirete printsiip. Kõlblikud rajatingimused	128
8.2.10	Koondatud nihkejõud plaadi nurkades	130
8.3	Plaadi lõplikud elemendid	133
8.3.1	Täielikkuse ja kooskõlalise nõuded	136
8.3.2	Lihtsad mittekooskõlalised elemendid	137

9	Lõplike elementide tarkvara	141
9.1	Arvutiprogrammide kasutamine	141
9.2	Arvutiprogrammide täpsusest	141
A	Variatsiooniprintsiibid	143
A.1	Variatsioon ja selle omadused	143
A.2	Euleri võrrand	144
A.3	Variatsiooniprintsiibid	145
B	Koorikud	149
B.1	Koorikute diferentsiaalvõrrandid	149
C	GNU Üldine Avalik Litsents	155

Joonised

1.1	Arvutusmehaanika koht	11
1.2	Varda fenomenoloogilise mudeli struktuuriskeem	14
1.3	Ühtlane lähendamine	18
1.4	Lõplike elementide meetodi koht	21
2.1	Vedru	23
2.2	Vedrusüsteem	24
2.3	Sisejõu töö	26
2.4	Võimalik töö	26
2.5	Vedrusüsteemi arvutusskeem	28
3.1	Varda element	31
3.2	Vasaku ja parema käe teljestik	32
3.3	Koordinaatide teisendus	32
3.4	Märgikokkulepped	34
3.5	Varrassüsteemi arvutusskeem	38
3.6	Sõlmede nummerdamine	41
3.7	Võrrandisüsteemi kuju	41
3.8	Painde diferentsiaalseosed	42
3.9	Varda tööseisundid	43
3.10	Tala kahel toel	44
3.11	Algparameetrid	44
4.1	Funktsiooni interpolatsioon	47
4.2	Lineaarne interpolatsioon	49
4.3	Ruutinterpolatsioon	50
4.4	Lineaarse interpolatsiooni sõlmed	50
4.5	Ruutinterpolatsiooni sõlmed	50
4.6	Kuupinterpolatsiooni sõlmed	50
4.7	Hermite'i interpolatsioon	51
4.8	Hermite'i interpolatsiooni sõlmed	52
4.9	Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid	53
4.10	Funktsiooni interpoleerimine tasapinnal	55
4.11	Lagrange'i funktsioonid tasapinnal	56

4.12	Sõlmpunktide koordinaadid	57
4.13	Kujufunktsioon N_3	58
4.14	Kujufunktsioon N_5	58
4.15	Kujufunktsioon N_4 , 8 sõlme	58
4.16	Kujufunktsioon N_4 , 9 sõlme	58
4.17	Kujufunktsioon N_9	59
4.18	Hermite'i interpolatsioon tasapinnal	59
4.19	Kolmnurga pindalakoordinaadid	60
4.20	6 sõlmpunktiga kolmnurkne element	62
4.21	10 sõlmpunktiga kolmnurkne element	63
4.22	Lagrange'i interpolatsioon ruumis	63
4.23	Ruumalakoordinaadid	64
5.1	Legendre'i polünoomid	69
5.2	Simpsoni valem	70
5.3	Simpsoni $\frac{3}{8}$ valem	70
5.4	Gaussi kaks sõlme	71
5.5	Gaussi kolm sõlme	71
5.6	L-koordinaat	73
5.7	Kolmnurga teisendus	75
5.8	Tetraeedri teisendus	75
5.9	Integreerimine pinnal	76
5.10	Kolmnurkse elemendi kaalud	79
5.11	Koormuse taandamine sõlmedesse	81
6.1	Isoparameetriline teisendus	85
6.2	Nelinurkse elemendi kujutis ja originaal	88
6.3	12 sõlmpunktiga elemendi kujutis ja originaal	88
6.4	Kolmnurkse elemendi kujutis ja originaal	88
6.5	Risttahukalise elemendi kujutis ja originaal	89
6.6	Tetraeedrilise elemendi kujutis ja originaal	89
7.1	Siirded ja deformatsioonid	92
7.2	Jäiga keha pööre	93
7.3	Pingevektorid	94
7.4	Pinged kaldpinnal	94
7.5	Elemendi tasakaal	96
7.6	Tasandülesanded	96
7.7	Materjalide omadused	97
7.8	Elemendi võimalik deformatsioonienergia	98
7.9	Koormuse taandamine sõlme	104
7.10	Lauskoormuse taandamine sõlme	107
7.11	Omakaalu taandamine sõlme	108
7.12	Bilineaarse elemendi jäikusmaatriks	110

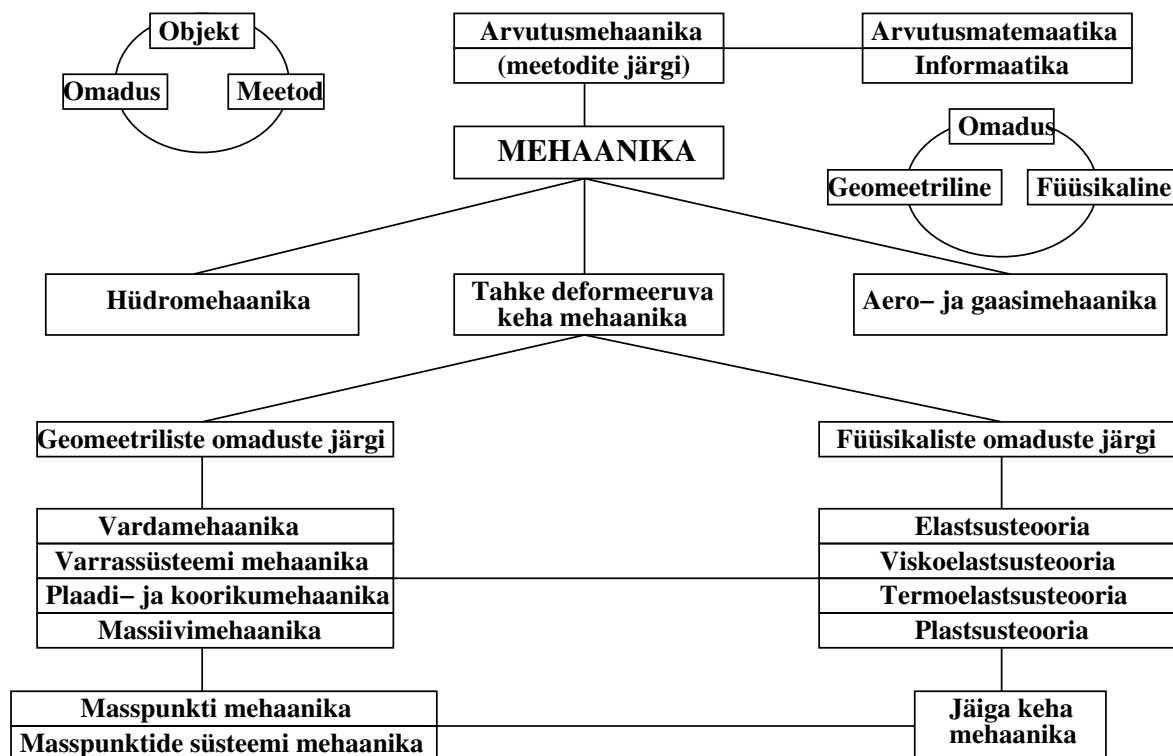
8.1	Plaat ja teljestik	117
8.2	Pikijõudude intensiivsused	117
8.3	Põikjõud Q_{xz} ja momendid M_{xx}, M_{xy}	118
8.4	Põikjõud Q_{yz} ja momendid M_{yx}, M_{yy}	119
8.5	Plaadi tasakaaluvõrrandid	119
8.6	Plaadi tasandpingus	122
8.7	Pingevektor plaadi serval	124
8.8	Plaadi serv	127
8.9	Siire ja pööre plaadi serval	127
8.10	Plaadi nurgad	131
8.11	Täiendav põikjõud plaadi nurkades	132
8.12	Plaadi rajatingimusi	135
8.13	C^0 -pidevus	136
8.14	C^1 -pidevus	137
8.15	Lihtsaim plaadi element	138
8.16	Kolmnurkne 6 vabadusastmega element	138
8.17	Nelinurkne 12 vabadusastmega element	139
8.18	Nelinurkne mittekooskõlaline element	139

Peatükk 1

Sissejuhatus

1.1 Lõplike elementide meetodi koht

Lõplike elementide meetod on üks *arvutusmehaanika* (joonis 1.1) meetod. Arvutusmehaanika tegeleb mehaanika rakendusülesannete numbrilise lahendamisega arvuti abil. Ta hõlmab probleemikompleksi, mis on seotud arvutusmatemaatikaga ja arvuti kasuta-



Joonis 1.1. Arvutusmehaanika koht

misega (programmvarustuse ja programmpakettide koostamisega tüüpülesannete jaoks jms). Arvutustehnika ja informaatika kiire areng kiirendas ka arvutusmeetodite loomist.

Meetodite üldistamine ja areng avardab tahkete kehade liikumise uurimise võimalusi. Suuri üldistusi on tehtud *lõplike elementide meetodis* (LEM) ja *rajaelementide meetodis* (REM). Meetodid kasutavad töö ja energia mõisteid (J. Argyris¹. Energiateoreemid [3]). Neid võib nimetada energeetilisteks meetoditeks. Energia mõiste üldsusest tuleneb ka nende meetodite üldsus. Neid on üldistatud arvutusmatemaatikas, kus töö (jõu ja teepikkuse korrutis) mõiste asemel esineb kahe funktsiooni korrutis ja räägitakse kaalutud hälvetest või projektsioonidest.

Füüsikas vaadeldakse tööd W kui jõu $\mathbf{F}$ ja teepikkuse $\mathbf{u}$ skalaarset korrutist

$$W = \mathbf{F} * \mathbf{u} \quad (1.1)$$

Vardamehaanikas vaadeldakse sisejõudude tööd W_s kui integraali pikijõu $N(x)$ ja prin-kuse $\lambda(x)$ korrutist

$$W_s = - \int_0^l N(x) \lambda(x) dx \quad (1.2)$$

Avaldise (1.2) puhul räägivad matemaatikud funktsioonide skalaarkorrutisest Hilberti² ruumis.

Funktsioonide $q(x)$, $v(x)$ skalaarkorrutist tähistatakse järgmiselt:

$$< q(x) * v(x) > = \int_0^l q(x) v(x) dx \quad (1.3)$$

Avaldist (1.3) võib vaadelda kui välisjõudude $q_x(x)$ tööd W_v . Kogu välisjõudude töö W_v varda pikkel

$$W_v = \int_0^l q_x(x) dx + F_{xi}v_{xi} \quad (1.4)$$

Toeraktsioonide ja kontaktjõudude $\vec{N}_x$ tööd nimetatakse ka rajajõudude tööks W_r

$$W_r = \vec{N}_x v \big|_0^l \quad (1.5)$$

kus $v \big|_0^l$ on rajasiireded. Kogu töö W on tööde W_v , W_r , W_s summa

$$W = W_v + W_r + W_s = 0 \quad (1.6)$$

mis võrdub nulliga. Avaldis (1.6) väljendab energiateoreemi

$$W = F_{xi}v_i + \int_0^l q_x(x) v dx + \vec{N}_x v \big|_0^l - \int_0^l N_x \lambda dx = 0 \quad (1.7)$$

pikkel.

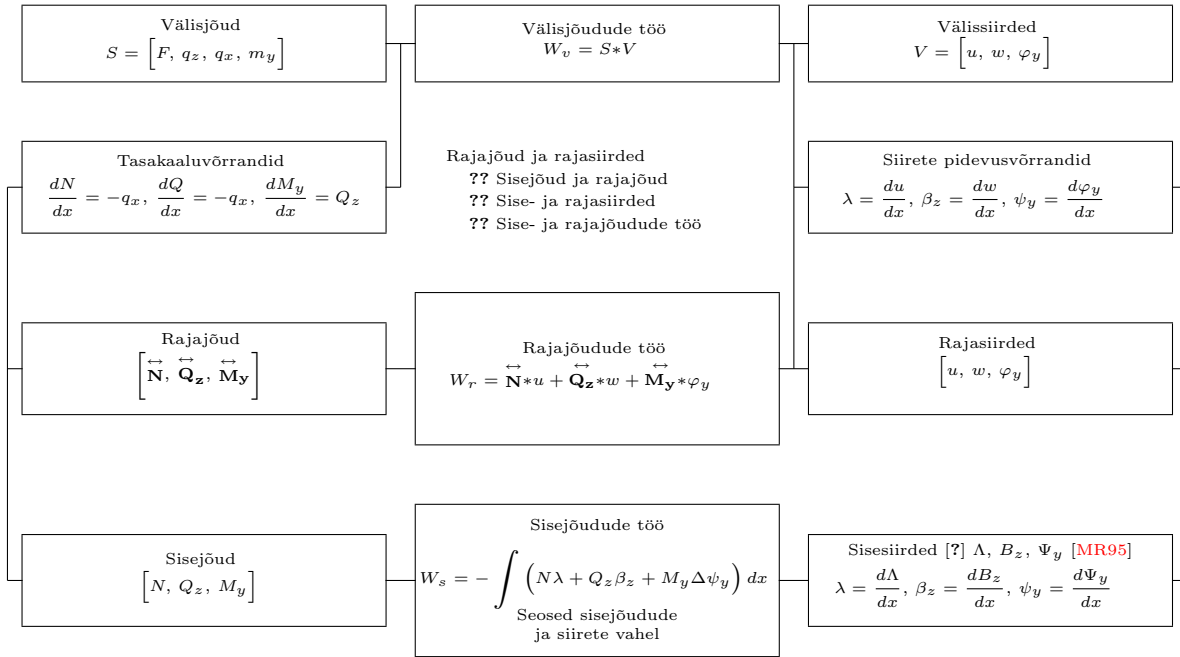
Joonisel 1.2 on varda fenomenoloogilise³ mudeli⁴ struktuuriskeem, mis näitab tööde seoseid.

Analoogilisi struktuuriskeeme on võimalik koostada tabeli 1.1 põhjal. Mitmesuguste teooriate olekuvõrrandid on tabelis 1.1 [22], [20], [21], [16].

Tabel 1.1. Fenomenoloogilised mudelid

Teooria	Liikumisvõrrandid	Olekuvõrrandid	Kinemaatika
Elastse varda pike	$\frac{dN_x}{dx} = -q_x$	$N_x = EA\lambda_x$	$\lambda_x = \frac{du_x}{dx}$
Bernoulli tala teooria	$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = -q_z$	$M_y = EI\psi_y$	$\psi_y = -\frac{d^2 w_z}{dx^2}$
Saint-Venant'i elastse varda vääne	$\operatorname{div} \left(\frac{1}{G\nabla\Phi} \right) + 2\theta = 0$	$\sigma_{xz} = G\gamma_{xz}$ $\sigma_{yz} = G\gamma_{yz}$ $\sigma_{xz} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$ $\sigma_{yz} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$	$\gamma_{xz} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}(y - y_0) + \frac{\partial u_z}{\partial x}$ $\gamma_{yz} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x - x_0) + \frac{\partial u_z}{\partial y}$
Analüütiline mehaanika	$\sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial q^k} \frac{dP_i}{dt} = -Q_k$	$P_i = \sum_{j=1}^{3n} m_{ij} V^j$	$V^j \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial q_k} \frac{dq^k}{dt}$
Elastsus-teooria	$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} = -X_i$	$\sigma_{ij} = C_{jikl}\epsilon^{kl}$	$\epsilon^{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
Darcy vedeliku-vool	$\operatorname{div}\mathbf{q} = -\mathbf{Q}$	$\mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{v}^v$	$\mathbf{v}^v \stackrel{\text{def}}{=} \nabla\Phi$
Fourier' sooja-vool	$\operatorname{div}\mathbf{q} = -\mathbf{Q}$	$\mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{p}_s$	$\mathbf{p}_s \stackrel{\text{def}}{=} \nabla T$
Ohmi elektri-vool	$\operatorname{div}\mathbf{q} = -\mathbf{Q}$	$\mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{i}_e$	$\mathbf{i}_e \stackrel{\text{def}}{=} \nabla V$
Ficki difu-sioon	$\operatorname{div}\mathbf{q} = -\mathbf{Q}$	$\mathbf{q} = \mathbf{D}\mathbf{p}_d$	$\mathbf{p}_d \stackrel{\text{def}}{=} \nabla c$

¹John Argyris, TTÜ audoktor, 1914.²David Hilbert, saksa matemaatik, 1862–1943.³**Fenomen** (< *kr phainomenon* 'nähtavale ilmuv') – meeltega tajutav juhtum, olukord või fakt.⁴**Mudel** – süsteemi, teooria või fenomeni kirjeldus, mis arvestab selle tuntuid omadusi ja mida võib kasutada tema omaduste uurimiseks.



Joonis 1.2. Varda fenomenoloogilise mudeli struktuuriskeem

Deformatsiooni potentsiaalne energia pikkel Π_s ehk deformatsioonenergia U on

$$\Pi_s = U = -W_s = \int_0^l N_x \lambda dx \quad (1.8)$$

Deformatsioonenergia U on positiivne ja sisejõudude töö W_s negatiivne. Kõik konstruktsioonid (ehitised, masinad, aparaadid, sõidukid jne) koosnevad elementidest, mida on võimalik liigitada järgmiselt: vardad, plaadid, koorikud. Nende tüüpiliste konstruktsioonelementide piisava tugevuse, jäikuse, stabiilsuse ja ökonoomsuse tagamiseks tuleb teha arvutused. Ka arvutused peavad olema ökonoomsed. Selleks tehakse üldteooriates lihtsustusi.

Lõplike elementide meetodi õpikutest soovitage Zienkiewicz [26], [25], Gallagher [10], Ottoseni [16], Huges'i [11], Bathe'i [4], Beckeri [5] õpikut.

1.2 Rajatingimused

Rajatingimuste selgitamiseks vaatleme tala elastse joone diferentsiaalvõrrandit piirkonnas $0 \leq x \leq l$

$$-\frac{d^2}{dx^2} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -q_z(x) \quad (1.9)$$

Edespidi võtame lihtsuse mõttes $EI = \text{const.}$ Sümboolselt võime võrrandi (1.9) kirjutada järgmisel kujul:

$$\mathcal{L}(w) = b \quad \text{piirkonnas } \Omega \quad (1.10)$$

siin

$$\mathcal{L} \equiv EI \frac{d^4}{dx^4} \quad b \equiv q_z(x) \quad (1.11)$$

Korrutame võrrandit (1.9) siirdega $\hat{w}$ ja integreerime üle varda l

$$- \int_0^l \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \hat{w} dx = - \int_0^l q_z(x) \hat{w} dx \quad (1.12)$$

Võrrandi (1.12) parempoolne liige väljendab väliskoormuse tööd W_v siirdel $\hat{w}$. Koondkoormuse F_{zi} töö varda telje punkti i siirdel $\hat{w}_i$ on $F_{zi}\hat{w}_i$. Seega

$$W_v = \int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi}\hat{w}_i \quad (1.13)$$

Võrrandi (1.12) vasakpoolset avaldist integreerime ositi valemi (1.14)

$$\int_0^l \mathbf{u} d\mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{v} \Big|_0^l - \int_0^l \mathbf{v} d\mathbf{u} \quad (1.14)$$

järgi.

$$\begin{aligned} & - \int_0^l \underbrace{\hat{w}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{Q_z} \hat{w} \Big|_0^l + \\ & + \int_0^l \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y} dx \end{aligned} \quad (1.15)$$

Avaldise (1.15) viimast liiget integreerime veel üks kord

$$\begin{aligned} \int_0^l \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_u \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{dv} dx &= \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d\hat{w}}{dx}}_{-\hat{\varphi}_y} \Big|_0^l - \\ & - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d^2 \hat{w}}{dx^2}}_{-\hat{\psi}_y} dx \end{aligned} \quad (1.16)$$

Arvestades avaldise (1.15) ja (1.12), saab võttandi (1.16) esitada võimalike tööde (passiivtööde) summana

$$\begin{aligned} & \underbrace{[Q_z \hat{w} + M_y \hat{\varphi}_y] \Big|_0^l}_{W_r^{(p)}} - \underbrace{\int_0^l M_y \hat{\psi}_y dx}_{W_s^{(p)}} = \\ & \underbrace{- \int_0^l q_z(x) \hat{w} dx - F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^{(p)}} \end{aligned} \quad (1.17)$$

kus $\hat{w} \equiv \delta w$ vaatleme kui virtuaalsiiret. Sisejõudude võimalik töö paindel $\delta W_s^{(p)}$ on

$$\delta W_s^{(p)} = - \int_0^l M_y \delta \psi_y dx \quad (1.18)$$

välisjõudude võimalik töö paindel $\delta W_v^{(p)}$

$$\delta W_v^{(p)} = \int_0^l q_z(p) \delta w dx + F_{zi} \delta w_i \quad (1.19)$$

raajajõudude võimalik töö paindel $\delta W_r^{(p)}$

$$\delta W_r^{(p)} = [Q_z \delta w + M_y \delta \varphi_y] \big|_0^l \quad (1.20)$$

Paindel tööde vastastikkuse teoreemi tõestamiseks jätkame avaldise (1.16) teise liikme ositi integreerimist

$$\begin{aligned} - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d^2 \hat{w}}{dx^2}}_{-d\hat{\varphi}_{yy}} dx &= - \underbrace{\frac{dw}{dx}}_{-\varphi_y} \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} \right)}_{-\hat{M}_y} \big|_0^l + \int_0^l \underbrace{\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3} \right)}_{-\hat{Q}_z} \underbrace{\frac{dw}{dx}}_{dw} dx = \\ &= \underbrace{w}_{\hat{w}} \underbrace{\left(EI_y \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3} \right)}_{-\hat{Q}_z} \big|_0^l - \underbrace{\left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right)}_{-M_y} \underbrace{\frac{d^2 \hat{w}}{dx^2}}_{-\hat{\psi}_y} \big|_0^l - \int_0^l \underbrace{\left(EI_y \frac{d^4 \hat{w}}{dx^4} \right)}_{\hat{p}_z} \underbrace{w}_{\hat{w}} dx \end{aligned} \quad (1.21)$$

Saadud seosed (1.21) asetame avaldisse (1.17), kust saame tööde vastastikkuse teoreemi paindel

$$\begin{aligned} \underbrace{[Q_z \hat{w} + M_y \hat{\varphi}_y] \big|_0^l}_{W_r^I} + \underbrace{\int_0^l q_z(x) \hat{w} dx + F_{zi} \hat{w}_i}_{W_v^I} &= \\ \underbrace{[\hat{Q}_z w + \hat{M}_y \varphi_y] \big|_0^l}_{W_r^{II}} + \underbrace{\int_0^l \hat{q}_z(x) w dx + \hat{F}_{zi} w_i}_{W_v^{II}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Avaldise (1.22) liikmed

$$[Q_z \hat{w} + M_y \hat{\varphi}_y] \big|_0^l - [\hat{Q}_z w + \hat{M}_y \varphi_y] \big|_0^l \quad (1.23)$$

on rajatingimused, kus w ja φ on olulised ehk kinemaatilised rajatingimused, Q_z ja M_y loomulikud ehk staatilised rajatingimused.

Saadud seos (1.22) väljendab tööde vastastikkuse teoreemi (E. Betti⁵): *esimese koormusolukorra (I) välisjõudude (sisejõudude) töö teise koormusolukorra (II) jõudude*

⁵Enrico Betti, itaalia ehitusinsener, 1823–1892.

poolt põhjustatud siiretel on võrdne teise koormusolukorra välisjõudude (sisejõudude) võimaliku tööga esimese koormusolukorra jõudude poolt põhjustatud siiretel.

Avaldise (1.22) võib kirjutada sümbolisel kujul

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{L}(w) \hat{w} d\Omega &= \int_{\Omega} w \mathcal{L}^*(\hat{w}) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma} [\mathcal{O}^*(\hat{w}) \mathcal{S}(w) - \mathcal{S}^*(\hat{w}) \mathcal{O}(w)] d\Gamma \end{aligned} \quad (1.24)$$

kus

Γ – piirkonna Ω väline rada,
 $\mathcal{L}^*$ – operaatori $\mathcal{L}$ kaasoperaator $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$,
 $\mathcal{O}$ – oluliste ehk kinemaatiliste rajatingimuste operaator,
 $\mathcal{S}$ – loomulike ehk staatiliste rajatingimuste operaator.

1.3 Ligikaudsed lahendid

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$\mathcal{L}(u_0) = b \quad \text{piirkonnas } \Omega \quad (1.25)$$

kus u_0 on diferentsiaalvõrrandi täpne lahend.

Selle võrrandi rajatingimused on

$$\mathcal{O}(u_0) = \mathcal{O}_0 \quad \text{rajal } \Gamma_1 \quad (1.26)$$

$$\mathcal{S}(u_0) = \mathcal{S}_0 \quad \text{rajal } \Gamma_2 \quad (1.27)$$

Olgu

$$u(x) \quad \text{lähedane funktsiooniga } u_0(x) \quad (1.28)$$

Funktsioonide lähendamise (aproksimeerimise⁶) ülesanded:

- lähendfunktsiooni valik
- mõõdu valik, millega hinnatakse funktsiooni lähedust
- lähendamismeetodi valik
- lähendamisvea hindamine

⁶**Aproksimeerimine** – objekti asendamine mingi teise temast vähe erineva objektiga.

1.3.1 Lähendfunktsioonid

Lähendfunktsiooniks võib valida

- algebralise või trigonomeetrilise funktsiooni
- üldistatud polünoomi

$$u(x) = \alpha_k \varphi_k(x) + \alpha_0. \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.29)$$

kus

α_k – sõltumatud parameetrid,

$\varphi_k(x)$ – lineaarselt sõltumatus funktsioonid, s.t tingimus

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0 \quad (1.30)$$

on täidetud siis, kui kõik parameetrid $\alpha_i = 0$

- ratsionaalse murru

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

- splaini $S(x)$

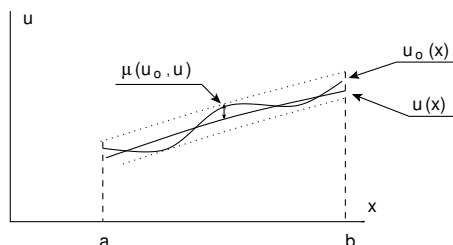
1.3.2 Lähendi vea mõõdu valik

Tähistame lähendi vea mõõdu järgmiselt:

$$\mu(u_0, u)$$

Vaatleme järgmiste lähendite vea mõõte:

- ühtlane lähendamine,
ühtlase lähendamise puhul on vea mõõduks täpse lahendi u_0 ja lähedase funkt-



Joonis 1.3. Ühtlane lähendamine

siooni u suurim erinevus (joonis 1.3)

$$\mu(u_0, u) = \sup_{\Omega} | \mu_o(x) - \mu(x) | \quad (1.31)$$

- astmekeskmisel lähendamisel on vea mõõt järgmine:

$$\mu(u_0, u) = \int_{\Omega} |\mu_o(x) - \mu(x)|^p dx, \quad p > 0 \quad (1.32)$$

kus

$p = 1$ – keskmine lähendamine,

$p = 2$ – ruutkeskmine lähendamine,

- kaalutud lähendamisel

$$\mu(u_0, u) = \int_{\Omega} |\mu_o(x) - \mu(x)|^p \varrho(x) dx, \quad p > 0 \quad (1.33)$$

kus $\varrho(x)$ on kaalufunktsioon.

Kaalufunktsiooni kasutamise näitena vaatleme paindemomendi M_0 täpset avaldist ja paindemomendi M lähedast avaldist. Nende kahe funktsiooni läheduse hindamiseks võtame kaalufunktsiooniks paindeprinkuse $\varrho(x) = \psi(x)$. Vea mõõduks on siis painde deformatsioonienergia erinevused.

1.3.3 Lähendamismeetod. Kaalutud hälvete meetod

Olgu u_0 differentiaalvõrrandi

$$\mathcal{L}(u_0) = b \quad \text{piirkonnas } \Omega \quad (1.34)$$

täpne lahend.

Selle võrrandi rajatingimused on

$$\mathcal{O}(u_0) = \mathcal{O}_o \quad \text{rajalõigul } \Gamma_1 \quad (1.35)$$

$$\mathcal{S}(u_0) = \mathcal{S}_o \quad \text{rajalõigul } \Gamma_2 \quad (1.36)$$

kus

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (1.37)$$

Valime lähendfunktsiooniks $u(x)$ üldistatud polünoomi

$$u(x) = \alpha_i \varphi_i(x), \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.38)$$

siin

α_i – sõltumatud parameetrid,

$\varphi_i(x)$ – lineaarselt sõltumatud funktsioonid.

Asetame lähendfunktsiooni $u(x)$ diferentsiaalvõrrandisse (1.34) ja rajatingimustesse (1.35), (1.36)

$$\mathcal{L}(u) - b = R \quad (1.39)$$

$$\mathcal{O}(u) - \mathcal{O}_o = R_1 \quad (1.40)$$

$$\mathcal{S}(u) - \mathcal{S}_o = R_2 \quad (1.41)$$

siin

R – diferentsiaalvõrrandi lahendi hälve,

R_1 – kinemaatiliste rajatingimuste hälve,

R_2 – staatiliste rajatingimuste hälve.

Valime kaalufunktsiooni

$$v(x) = \beta_i \psi_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1.42)$$

Korrutame avaldised (1.39), (1.40), (1.41) kaalufunktsiooniga (1.42), integreerime üle piirkonna Ω ja nõudes, et

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}(u) - b) v(x) d\Omega = \int_{\Omega} R v(x) d\Omega = 0 \quad (1.43)$$

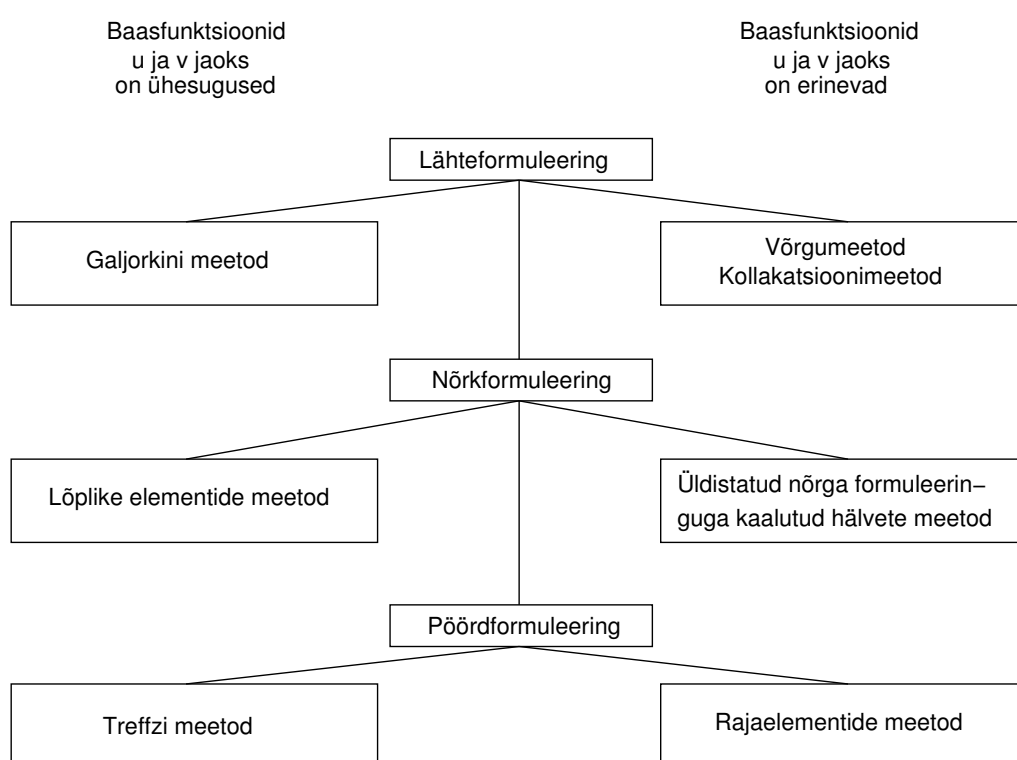
$$\int_{\Gamma_1} (\mathcal{O}(u) - \mathcal{O}_o) v(x) d\Gamma = \int_{\Gamma_1} R_1 v(x) d\Gamma = 0 \quad (1.44)$$

$$\int_{\Gamma_2} (\mathcal{S}(u) - \mathcal{S}_o) v(x) d\Gamma = \int_{\Gamma_2} R_2 v(x) d\Gamma = 0 \quad (1.45)$$

Sõltuvalt lähendfunktsiooni $u(x) = \alpha_i \varphi_i(x)$ valikust eristatakse järgmisi formuleeringuid:

- $R_1 = 0, R_2 = 0$ – lähteformuleering
- $R_1 = 0$ – nõrkformuleering
- $R = 0$ – pöördformuleering

Sõltuvalt sellest, kas baasfunktsioonid $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ on valitud ühesugused või erinevad klassifitseeritakse lahendusmeetodeid (joonis 1.4)



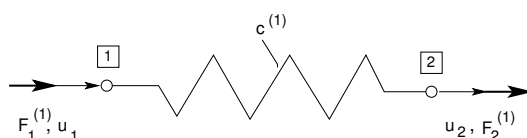
Joonis 1.4. Lõplike elementide meetodi koht

Peatükk 2

Elastne vedrusüsteem

2.1 Elastse vedru jäikusmaatriks

Vaatleme elastse vedru (joonis 2.1) tasakaalu. Vedru otste siirded on u_1 ja u_2 . Vedrule mõjuvad jõud $F_1^{(1)}$ ja $F_2^{(1)}$. Vedru jäikus on $c^{(1)}$. Vedru otstes mõjuvate jõudude ja siirete



Joonis 2.1. Vedru

vahel on järgmine seos (2.1):

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Kinnitame vedru sõlmpunktis 2 nii, et $u_2 = 0$. Võrrandist (2.1) saab järgmise seose (2.2:

$$F_1^{(1)} = k_{11}u_1 = c^{(1)}u_1 \quad (2.2)$$

Tasakaalutingimusest saame

$$F_2^{(1)} = -F_1^{(1)} = -c^{(1)}u_1, \quad k_{21} = -c^{(1)} \quad (2.3)$$

Kinnitame vedru sõlmpunktis 1 nii, et $u_1 = 0$. Võrrandist (2.1) saab järgneb seos (2.4:

$$F_1^{(2)} = k_{22}u_2 = c^{(1)}u_2 \quad (2.4)$$

Tasakaalutingimusest saame

$$F_1^{(1)} = -F_2^{(1)} = -c^{(1)}u_2, \quad k_{12} = -c^{(1)} \quad (2.5)$$

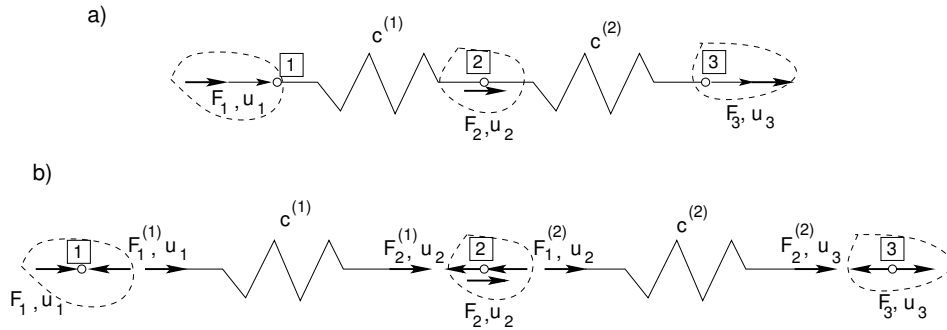
Nüüd võib avaldise (2.1) kirjutada kujule (2.6)

$$\begin{bmatrix} c^{(1)} & -c^{(1)} \\ -c^{(1)} & c^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Tasakaaluvõrrandi (2.6) vasakul pool on vedru jäikusmaatriks.

2.2 Konstruktsiooni jäikusmaatriks

Vaatleme kahest vedrust (joonis 2.2 a)) koosnevat süsteemi, mis on koormatud kolme jõuga F_1 , F_2 , F_3 sõlmpunktides $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $c^{(2)}$. Eraldame sõlmed ja vedrud (joonis



Joonis 2.2. Vedrusüsteem

2.2 b)). Koostame sõlmede kohta tasakaalutingimused

$$\begin{aligned} F_1 &= F_1^{(1)} \\ F_2 &= F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\ F_3 &= F_2^{(2)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vedru otste siirete ja otstes mõjuvate jõudude vahelised seosed võib kirjutada maatrikskujul

$$\begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(1)} & -c^{(1)} \\ -c^{(1)} & c^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(2)} & -c^{(2)} \\ -c^{(2)} & c^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Seose (2.8) ja (2.9) paremal pool asetsevaid maatrikseid nimetatakse vedru jäikusmaatriksiks.

Asetades seosed (2.8) ja (2.9) võrrandisüsteemi (2.7), saame

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(1)} & -c^{(1)} & 0 \\ -c^{(1)} & c^{(1)} + c^{(2)} & -c^{(2)} \\ 0 & -c^{(2)} & c^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Võrrandisüsteemi (2.10) üldkuju

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Võrrandisüsteemi (2.11) paremal pool asetsevat maatriksit nimetatakse konstruktsiooni jäikusmaatriksiks. . Vaatleme võrrandisüsteemi (2.11) koostamiseks vajalikke tabeleid. Esmalt kirjeldame vedrusüsteemi elementide asetust (tabel 2.1). Seejärel koostame

Tabel 2.1. Vedrusüsteemi topoloogia

Vedru nr	Algus	Lõpp
(1)	1	2
(2)	2	3

elementide indekstabelid (tabel 2.2), mis annavad üldise jäikusmaatriksi aadressid (tabel 2.3). Indekstabelite alusel kantakse elementide jäikusmaatriksid konstruktsiooni

Tabel 2.2. Elementide indekstabelid

Element nr 1			Element nr 2		
Sõlm	1	2	Sõlm	2	3
1	11	12	2	22	23
2	21	22	3	32	33

Tabel 2.3. Konstruktsiooni jäikusmaatriksi aadressid

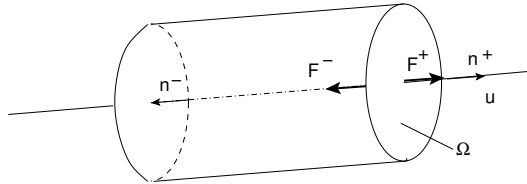
Sõlm nr	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

jäikusmaatriksisse

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ 0 & k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

2.3 Elastse vedru võimalik töö

Vaatleme elastse vedru sisejõudude tööd. Vedru otsa ristlõikes Ω mõjuvad jõud F^+ ja F^- (joonis 2.3), mis on võrdsed ja vastupidi suunatud. Olgu välispind pinnanormaliga n^+ ja sisepind pinnanormaliga n^- . Siis on välispinnal mõjuv jõud F^+ rajajõud ja



Joonis 2.3. Sisejõu töö

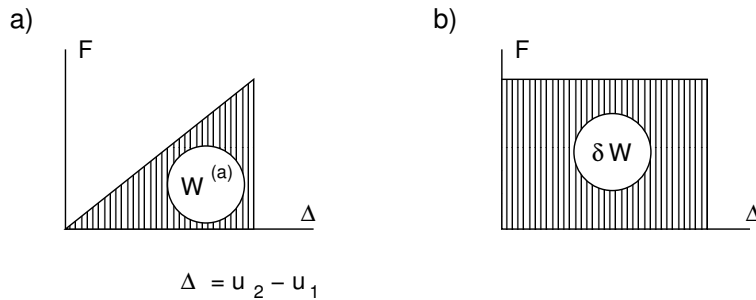
sisepinnal mõjuv jõud F^- sisejõud. Ristlõike ciiret tähistab u . Rajajõu F^+ töö W_r siirdel u on

$$W_r = F^+ * u \quad (2.13)$$

Sisejõu F^- töö W_s siirdel u on

$$W_s = -F^- * u \quad (2.14)$$

Eristatakse aktiivtööd $W^{(a)}$ ja passiivtööd $W^{(p)}$. Aktiivtöö jõud teevad tööd nende endi põhjustatud siiretel (joonis 2.4 a). Passiivtöö puhul on jõudude töö võimalikel siiretel (neid siirdeid ei kutsu esile vaadeldavad jõud)(joonis 2.4 b).



Joonis 2.4. Võimalik töö

Oldu vedru otste siirded u_1 , u_2 ja vedru pikenemine Δ

$$\Delta = u_2 - u_1 \quad (2.15)$$

Võimalik sisejõudude töö $\delta W \equiv W^{(p)}$ on

$$\delta W_s = -F (\delta \Delta) = -F (\delta u_2 - \delta u_1) \quad (2.16)$$

Arvestades jõu F ja vedru pikenemise Δ vahelist seost

$$F = c * \Delta = c * (u_2 - u_1) \quad (2.17)$$

saame

$$\delta W_s = -c * (u_2 - u_1) (\delta \Delta) = -[\delta u_1 (c\delta u_1 - c\delta u_2) + \delta u_2 (c\delta u_2 - c\delta u_1)] \quad (2.18)$$

Avaldise (2.18) võib kirjutada maatrikskujul

$$\delta W_s = - \begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Võimalik välisjõudude töö δW_v on

$$\delta W_v = - \begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Energia teoreemi põhjal on välisjõudude töö W_v ja sisejõudude töö W_s summa null

$$\delta W_v + \delta W_s = 0 \quad (2.21)$$

Arvestades välisjõudude võimalikku tööd (2.20) ja sisejõudude võimalikku tööd (2.19), saame

$$\begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta u_1 & \delta u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Avaldise (2.22) võib esitada ka lühemalt indekskujul

$$\delta u_i * F_i = \delta u_i * k_{ij} * u_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.23)$$

siin k_{ij} on jäikusmaatriksi $\mathbf{k}$ elemendid

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Jättes ära võrrandisüsteemis (2.22) δu_1 ja δu_2 , saame tasakaaluvõrrandi

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

või indekskujul

$$F_i = k_{ij} * u_j \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.26)$$

2.4 Võrrandisüsteemi lahendamine

Vaatleme võrrandisüsteemi (2.27) lahendamist

$$\begin{bmatrix} c^{(1)} & -c^{(1)} & 0 \\ -c^{(1)} & c^{(1)} + c^{(2)} & -c^{(2)} \\ 0 & -c^{(2)} & c^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

mille maatrikskuju on

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \quad (2.28)$$

Võrrandisüsteemi (2.27) determinant

$$\det K = 0 \quad (2.29)$$

Determinandi null on tingitud sellest, et vedrusüsteemil (joonis 2.2) ei ole kirjeldatud rajatingimusi.

Kinnitame vedrusüsteemi sõlmpunktis $\boxed{1}$ ($u_1 = 0$), siis võrrandisüsteemi

$$\begin{bmatrix} c^{(1)} & \vdots & -c^{(1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -c^{(1)} & \vdots & c^{(1)} + c^{(2)} & -c^{(2)} \\ 0 & -c^{(2)} & \vdots & c^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ \dots \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Tundmatuteks on u_2 , u_3 ja F_1 . Leiame esmalt u_2 ja u_3 võrrandisüsteemi (2.30) kahest viimasest võrrandist

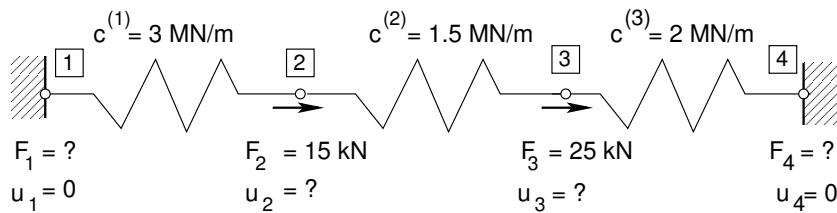
$$\begin{bmatrix} c^{(1)} + c^{(2)} & -c^{(2)} \\ -c^{(2)} & c^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Võrrandisüsteemi (2.30) esimesest võrrandist (2.32)

$$\begin{bmatrix} -c^{(1)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

arvutame tundmatu F_1 leitud u_2 ja u_3 abil.

Näide 2.1 Leida joonisel 2.5 näidatud vedrusüsteemi toereaktsioonid F_1 , F_2 ja sõlmpunktide $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ siirded u_2 , u_3 . Vedrusüsteem on koormatud jõududega $F_2 = 15 \text{ kN}$ ja $F_3 = 25 \text{ kN}$. Vedrude jäikused on $c^{(1)} = 3 \text{ MN/m}$ ja $c^{(2)} = 1.5 \text{ MN/m}$ ja $c^{(3)} = 2 \text{ MN/m}$.



Joonis 2.5. Vedrusüsteemi arvutusskeem

Vedrusüsteemi taskaaluvõrrand on

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \vdots & K_{12} & K_{13} & \vdots & K_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{21} & \vdots & K_{22} & K_{23} & \vdots & K_{24} \\ K_{31} & \vdots & K_{32} & K_{33} & \vdots & K_{34} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{41} & \vdots & K_{42} & K_{43} & \vdots & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ \dots \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_4 = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_2 \\ F_3 \\ \dots \\ F_4 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Jäikusmaatriksi (2.33) koostamiseks kirjeldame süsteemi topoloogiat (tabel 2.4). Koostame

Tabel 2.4. Süsteemi topoloogia

Vedru nr	Algus	Lõpp
(1)	1	2
(2)	2	3
(3)	3	4

elementide indekstabelid (tabel 2.5) ja elementide jäikusmaatriksid (tabel 2.6) Tabelist 2.5

Tabel 2.5. Vedrude indekstabelid

Element nr 1			Element nr 2			Element nr 3		
Sõlm	1	2	Sõlm	2	3	Sõlm	3	4
1	11	12	2	22	23	3	33	34
2	21	22	3	32	33	4	43	44

Tabel 2.6. Vedrude jäikusmaatriksid

Element nr 1			Element nr 2			Element nr 3		
Sõlm	1	2	Sõlm	2	3	Sõlm	3	4
1	3.0	-3.0	2	1.5	-1.5	3	2.0	-2.0
2	-3.0	3.0	3	-1.5	1.5	4	-2.0	2.0

näeme, millistele aadressidele tuleb kanda elementide jäikusmaatriksi elemendid (tabel 2.6). Konstruktsiooni jäikusmaatriksi elemendid on

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= k_{11}^{(1)} = 3.0 \text{ MN/m} \\
 K_{12} &= k_{12}^{(1)} = -3.0 \text{ MN/m} \\
 K_{13} &= 0 \\
 K_{14} &= 0 \\
 K_{22} &= k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} = 3.0 + 1.5 = 4.5 \text{ MN/m} \\
 K_{23} &= k_{12}^{(2)} = -1.5 \text{ MN/m} \\
 K_{24} &= 0 \\
 K_{33} &= k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)} = 1.5 + 2.0 = 3.5 \text{ MN/m} \\
 K_{34} &= k_{12}^{(3)} = -2.0 \text{ MN/m} \\
 K_{44} &= k_{22}^{(3)} = 3.0 \text{ MN/m}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Jäikusmaatriks $\mathbf{K}$ on sümmeetriline ($K_{ij} = K_{ji}$).

Esmalt koostame tasakaaluvõrrandisüsteemi (2.33) teise ja kolmanda võrrandi

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Võrrandisüsteemi (2.35) arvuline kuju

$$\begin{bmatrix} 4.5 & -1.5 \\ -1.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \cdot 10^{-3} \\ 25 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Võrrandisüsteemi (2.36) determinant

$$\det K_2 = 13.5 \text{ MN}^2/\text{m}^2 \quad (2.37)$$

Võrrandisüsteemi (2.35) lahendiks saame

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{F} \quad (2.38)$$

kus $\mathbf{K}_2^{-1}$ on matriksi $\mathbf{K}_2$ (2.35) pöördmatriks

$$\mathbf{K}_2^{-1} = \frac{1}{\det K_2} \begin{bmatrix} K_{33} & -K_{23} \\ -K_{32} & K_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{13.5} \begin{bmatrix} 3.5 & 1.5 \\ 1.5 & 4.5 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Võrrandisüsteemi (2.36) lahendiks saame

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13.5} \begin{bmatrix} 3.5 & 1.5 \\ 1.5 & 4.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \cdot 10^{-3} \\ 25 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.666... \cdot 10^{-3} \\ 1.0 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \text{ m} \quad (2.40)$$

Tasakaaluvõrrandisüsteemi (2.33) esimesest ja neljandast võrrandist saame

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{12} & K_{13} \\ K_{42} & K_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3.2 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6.666... \cdot 10^{-3} \\ 1.0 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.0 \\ -20.0 \end{bmatrix} \text{ kN} \end{aligned} \quad (2.41)$$

Kontrollime vedrusüsteemi tasakaalu

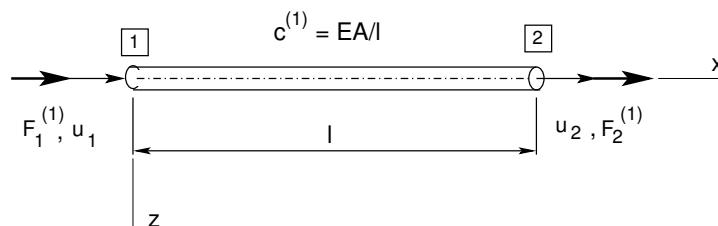
$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = -20.0 + 15.0 + 25.0 - 20.0 = 0 \quad (2.42)$$

Peatükk 3

Varraskonstruksioonid

3.1 Varda pikke jäikusmaatriks

Vaatleme varda elementi (joonis 3.1) pillusega l ja jäikusega $c^{(1)} = \frac{EA}{l}$ Varda teljega



Joonis 3.1. Varda element

seome kohalikud koordinaadid x^* ja z^* . Kohalikes koordinaatides varda jäikusmaatriksi ja tasakaaluvõrrandi saame sarnaselt vedru tasakaaluvõrrandile (2.6)

Varda tasakaaluvõrrand on

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

ehk maatrikskujul

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.2)$$

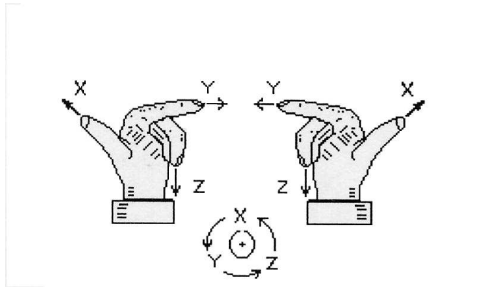
kus varda jäikusmaatriks $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3.2 Kohalik ja üldteljestik

Varraskonstruksiooni iga vardaga seostatakse teljestik nii, et x-telg ühtib varda teljega (vt joonis 3.4, teljed x^* ja z^*). Nimetame neid kohalikeks teljestikeks. Konstruksiooni

varraste asukohta ja nende suuna kirjeldamiseks kasutame üldteljestikku (teljed x ja z). Kasutame ainult parema käe teljestikku (joonis 3.2). Vaadates telje positiivsest otsast, loeme pööret positiivseks z -teljest x -telje suunas, x -teljest y -telje suunas ja y -teljest z -telje suunas. Joonisel 3.2 on näidatud nii parema käe kui ka vasaku käe teljestik. Tasapinnaliste konstruktsioonide kirjeldamisel vaatame y -telje positiivsest otsast, nii näeme x - ja z -telge. Positiivne pöördnurk on z -teljest x -telje suunas. Parema käe teljestiku puhul on positiivne pööre vastupäeva. Vasaku käe teljestiku korral on positiivne pööre päripäeva. Siirete ja jõuvektorite kirjeldamiseks kohalikes ja üldkoordinaatides on vajalikud koordinaatide teisendused.

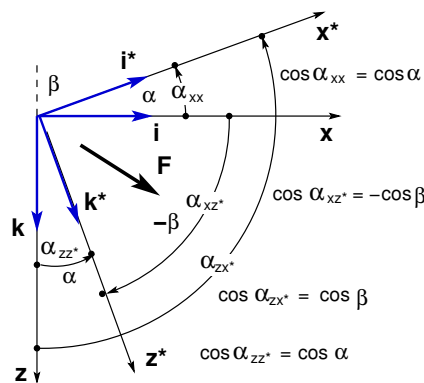


Joonisel 3.2 on näidatud positiivse pöördnurka suund. Vaadates telje positiivsest otsast, loeme pööret positiivseks z -teljest x -telje suunas, x -teljest y -telje suunas ja y -teljest z -telje suunas.

Joonis 3.2. Vasaku ja parema käe teljestik

Siirete ja jõuvektorite kirjeldamiseks kohalikes ja üldkoordinaatides tuleb koordinaat teisendada.

Koordinaatide teisendusvalemite tuletamiseks vaatleme joonist 3.3. Olgu koordinaadid xyz üldkoordinaadid ja $x^*y^*z^*$ kohalikud koordinaadid. Vaatleme veel parema käe kolmikuid $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ja $\mathbf{i}^*, \mathbf{j}^*, \mathbf{k}^*$. Need on ühikvektorite kolmikud, mis määravad ära koordinaattelgede suunad. Joonisel 3.3 on ühikvektorid $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{j}^*$ suunatud vaataja poole. Vektori



Joonis 3.3. Koordinaatide teisendus

$\vec{F}$ projektsioonid telgedele xz on F_x, F_z ja telgedele x^*z^* on F_x^*, F_z^* . Seega

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_z \cdot \vec{k} = F_x^* \vec{i}^* + F_z^* \vec{k}^*, \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{i}^* \\ \vec{k}^* \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{c} \vec{i} \\ \vec{k} \end{array} \right\} \quad (3.4)$$

Korrutame avaldise (3.4) vektoriga $\vec{\mathbf{i}}^*$ ja vektoriga $\vec{\mathbf{k}}^*$. Võtame arvesse, et risti olevate vektorite skalaarkorrutis (*sisekorrutis*) on null. Saame

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* &= F_x^* = F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* + F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* \\ \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* &= F_z^* = F_x \cdot \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* + F_z \cdot \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^*\end{aligned}\quad (3.5)$$

Pöördseoste leidmiseks korrutame avaldist (3.4) vektoriga $\vec{\mathbf{i}}$ ja vektoriga $\vec{\mathbf{k}}$. Pöördseosed on

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{i}} &= F_x = F_x^* \cdot \vec{\mathbf{i}}^* \cdot \vec{\mathbf{i}} + F_z^* \cdot \vec{\mathbf{k}}^* \cdot \vec{\mathbf{i}} \\ \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{k}} &= F_z^* = F_x^* \cdot \vec{\mathbf{i}}^* \cdot \vec{\mathbf{k}} + F_z^* \cdot \vec{\mathbf{k}}^* \cdot \vec{\mathbf{k}}\end{aligned}\quad (3.6)$$

Ühikvektorite skalaarkorrutis võrdub nende positiivsete suundade vahelise nurga koosinusega

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{i}}^* &= \vec{\mathbf{i}}^* \cdot \vec{\mathbf{i}} = \cos \alpha_{xx^*}, & \vec{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* &= \cos \alpha_{xz^*} \\ \vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}}^* &= \vec{\mathbf{k}}^* \cdot \vec{\mathbf{k}} = \cos \alpha_{zz^*}, & \vec{\mathbf{i}}^* \cdot \vec{\mathbf{k}} &= \cos \alpha_{zx^*}\end{aligned}\quad (3.7)$$

Telje x^* suunakoosinused tähistame järgmiselt: $\cos \alpha_{xx^*} = \cos \alpha$ ja $\cos \alpha_{zx^*} = \cos \beta$ ($\cos \beta = \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$). Jooniselt 3.3 näeme, et

$$\begin{aligned}\cos \alpha_{xx^*} &= \cos \alpha, & \cos \alpha_{zx^*} &= \cos \beta \\ \cos \alpha_{zz^*} &= \cos \alpha, & \cos \alpha_{xz^*} &= -\cos \beta\end{aligned}\quad (3.8)$$

Varda lõpu ja alguse koordinaatide (joonis 3.4) x_L, z_L, x_A, z_A järgi saab need suunakoosinused arvutada

$$\cos \alpha = \frac{x_L - x_A}{l} \quad (3.9)$$

$$\cos \beta = \frac{z_L - z_A}{l} \quad (3.10)$$

kus l on varda pikkus

$$l = \sqrt{(z_L - z_A)^2 + (x_L - x_A)^2} \quad (3.11)$$

Nüüd avaldame koordinaatteisendused järgmiselt:

$$\begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x^* \\ F_z^* \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

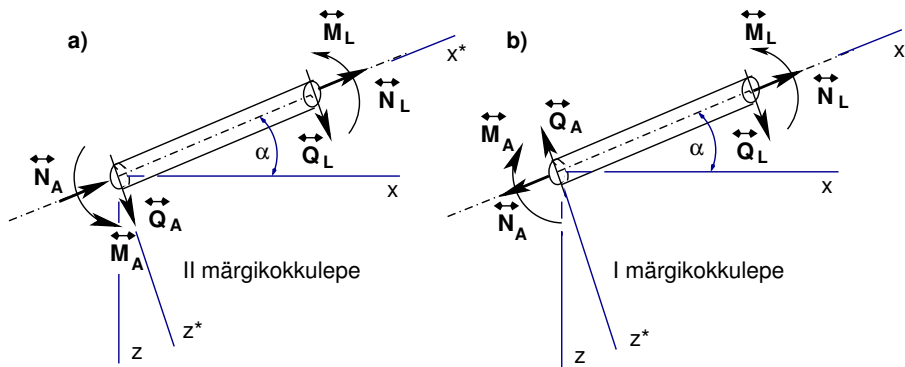
Võrreldes avaldistes (3.12) ja (3.13) koordinaatide teisendusmaatrikseid, näeme, et nendes on read ja veerud ära vahetatud, s.t ühe saab teisest *transposeerimisel*. Asendades võrrandis (3.12) F_x ja F_z nende avaldistega võrrandis (3.13), saame maatrikskorrutise

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Siin annab maatriksi korrutamine tema transposeeritud kujuga ühikmaatriksi. Selliseid maatrikseid nimetatakse *ortogonaalseteks maatriksiteks*. Nendel on hea omadus, et pöördmaatriks võrdub tema transposeeritud kujuga (mõlemal juhul on korrutiseks ühikmaatriks).

3.3 Jäikusmaatriks üldkoordinaatides

Rajajõudude (kontaktjõudude) positiivse suuna määramisel on kasutusel kaks märgikokkulepet (joonis 3.4, kus on kasutusel parema käe teljestik, vt joonis 3.2). *Esimene*



Joonis 3.4. Märgikokkulepped

märgikokkulepe (joonis 3.4 b) on tuttav tehnilisest mehaanikast. *Teine märgikokkulepe* (joonis 3.4 a) on vajalik varrassüsteemide tasakaaluvõrrandite algoritmide koostamiseks.

Võrreldes I märgikokkulepet II märgikokkuleppega, näeme, et varda lõpus olevad rajajõudude (kontaktjõudude) suunad langevad kokku. Varda alguses on rajajõudude suunad vastasmärgilised. *Sisejõude* leitakse rajajõudude kaudu. Sisejõudude märgid ei tohi sõltuda rajajõudude märgikokkuleppest.

Sisejõudude märgireeglid on raamatus [MR96] lk 35 „Tõmbejõu loeme positiivseks”, „Survejõu loeme negatiivseks”; lk 45 „Põikjõu range märgireegel: positiivseks loeme põikjõudu, mis *positiivset sisepinda* nihutab koordinaattelje positiivses suunas või *negatiivset sisepinda* koordinaattelje negatiivses suunas”, „Põikjõu märgi tööreegel: positiivseks loeme põikjõudu, mis nihutab *positiivset sisepinda* päripäeva”; lk 43 „Paindemomendi loeme positiivseks, kui varda positiivsed kiud on tõmmatud”.

Tehnilises mehaanikas (tugevusõpetuses) langevad sisejõudude märgireeglid ja rajajõudude (kontaktjõudude) märgireeglid (I märgikokkulepe) kokku. Kasutades II mär-

gikokkulepet, tuleb sisejõudude märgi määramisel rajajõudude (kontaktjõudude) kaudu varda alguses arvestada nende erinevaid märke. Rõhutame, et sisejõud on varda *sisepinnal* ja rajajõud (kontaktjõud) mõjuvad varda *välispinnal*. Lisame varda tasakaaluvõrranditele (3.1) kohalikes koordinaatides tühjad read, mis vastavad Z^* koordinaadile

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ v_1^* \\ u_2^* \\ v_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1}^* \\ F_{z1}^* \\ F_{x2}^* \\ F_{z2}^* \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

ehk maatrikskujul

$$\mathbf{K}^* \mathbf{u}^* = \mathbf{F}^* \quad (3.16)$$

Teisendame jõud üldkoordinaatidest kohalikesse koordinaatidesse

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^* \\ F_{z1}^* \\ F_{x2}^* \\ F_{z2}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & 0 & 0 \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \beta \\ 0 & 0 & -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

ehk maatrikskujul

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{T} \mathbf{F} \quad (3.18)$$

siin on $\mathbf{T}$ pikkele tööava varda teisendusmaatriks

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & 0 & 0 \\ -\cos \beta & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \cos \beta \\ 0 & 0 & -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Teisendusmaatriksi $\mathbf{T}$ abil avaldame siirded kohalikes koordinaatides $\mathbf{d}^*$, siirete kaudu üldkoordinaatides $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (3.20)$$

Teisendusmaatriks (3.19) on ortogonaalne, s.o

$$\mathbf{T}^{(-1)} = \mathbf{T}^{(T)} \quad (3.21)$$

kus

$\mathbf{T}^{(-1)}$ – maatriksi $\mathbf{T}$ pöördmaatriks

$\mathbf{T}^{(T)}$ – transposeeritud maatriks

Teisenduste (3.18), (3.20) pöördteisendused on

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^* \quad (3.22)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}^T \mathbf{d}^* \quad (3.23)$$

Jäikusmaatriksi $\mathbf{K}$ üldkoordinaatides saame avaldise (3.22), (3.16) ja (3.20) abil

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{d}^* = \underbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T}}_{\mathbf{K}} \mathbf{d} \quad (3.24)$$

kus

$\mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T}$ on jäikusmaatriks $\mathbf{K}$ üldkoordinaatides

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \quad (3.25)$$

Teostame maatriksi $\mathbf{T}^T$ ja maatriksi $\mathbf{K}^*$ korrutamise, tähistades $c = \cos \alpha$, $s = \cos \beta$. Korrutise elementideks on maatriksi $\mathbf{T}^T$ i-nda rea ja maatriksi $\mathbf{K}^*$ j-nda veeru vastavate elementide korrutiste summad

$$\begin{aligned} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \mathbf{K}^* \\ \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}; \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & 0 & -c & 0 \\ s & 0 & -s & 0 \\ -c & 0 & c & 0 \\ -s & 0 & s & 0 \end{bmatrix} &= \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \end{aligned} \quad (3.26)$$

Korrutame saadud tulemust $\mathbf{T}^T \mathbf{K}^*$ teisendusmaatriksiga $\mathbf{T}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} &= \mathbf{T} \\ \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & 0 & -c & 0 \\ s & 0 & -s & 0 \\ -c & 0 & c & 0 \\ -s & 0 & s & 0 \end{bmatrix}; \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} &= \mathbf{K} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Varda elemendi jäikusmaatriks üldkoordinaatides

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & \vdots & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & \vdots & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & \vdots & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & \vdots & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Saadud jäikusmaatriksi esitame alammaatriksi $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

kaudu

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k} & -\mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.4 Elemendis mõjuv pikkejõud

Tasakaaluvõrrandisüsteemi lahendamise tulemusel saadakse sõlmpunktide siirded u_1 , v_1 , u_2 , v_2 . Varda elemendis tuleb leida sisejõud. Sisejõudude leidmiseks vaatleme varda tasakaaluvõrrandit kohalikes koordinaatides (3.16)

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{K}^* \mathbf{d}^* = \mathbf{K}^* \mathbf{T} \mathbf{d} \quad (3.31)$$

Korrutise $\mathbf{F}^* \mathbf{T}$ saame järgmiselt

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} = \mathbf{T} \\ \mathbf{K}^* &= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & c & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{K}^* \mathbf{T} \quad (3.32) \end{aligned}$$

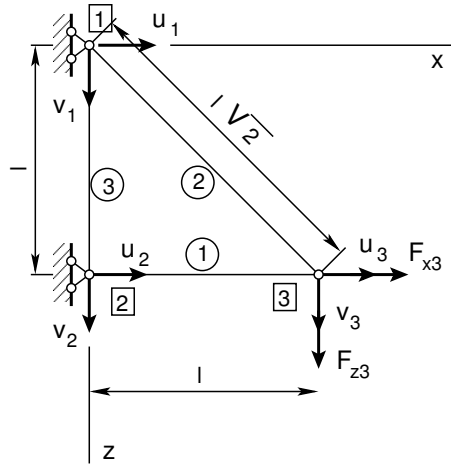
võrrandist (3.31) saame korrutise (3.32) abil

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^* \\ F_{x2}^* \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c & s & -c & -s \\ -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Arvestades, et varda lõpus olev rajajõu märk langeb kokku sisejõu märgiga, saame

$$N = [F_{x2}^*] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Näide 3.1 Leida varrassüsteemi (joonis 3.5) sõlmpunkti 3 siirded u_3 ja v_3 . Koormus F_{x3} ja F_{z3} on rakendatud sõlme 3. Varraste 1, 2, 3 pikkused on l , $l\sqrt{2}$ ja l .



Joonis 3.5. Varrassüsteemi arvutuskeem

Varrassüsteemi sõlmpunktide siirete vektor $\mathbf{d}$ ja jõudude vektor $\mathbf{F}$ on

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \\ F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Jäikusmaatriksi $\mathbf{K}_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) koostamiseks kirjeldame süsteemi topoloogiat (tabel 3.1). Võttes arvesse varraste suunda (tabel 3.1), esitame varraste suunakoosinused tabelis (tabel

Tabel 3.1. Varrassüsteemi topoloogia

Varras nr	Algus	Lõpp
(1)	2	3
(2)	1	3
(3)	1	2

3.2). Koostame elementide indekstabelid (tabel 3.3) ja jäikusmaatriksid (tabel 3.4), kus $\mathbf{k}_{ij}^{(n)}$ on alammatraksid (3.36), (3.37), (3.38), (vaata avaldist 3.29).

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{11}^{(1)} &= \mathbf{k}_{22}^{(1)} = \mathbf{k}^{(1)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{12}^{(1)} &= \mathbf{k}_{21}^{(1)} = -\mathbf{k}^{(1)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{11}^{(2)} &= \mathbf{k}_{22}^{(2)} = \mathbf{k}^{(2)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_{12}^{(2)} &= \mathbf{k}_{21}^{(2)} = -\mathbf{k}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Tabel 3.2. Varraste suunakoosinused

Varras nr	$\cos \alpha$ c	$\cos \beta$ s
(1)	1.0	0.0
(2)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
(3)	0.0	1.0

Tabel 3.3. Varraste indekstabelid

Element nr 1			Element nr 2			Element nr 3		
Sõlm	2	3	Sõlm	1	3	Sõlm	1	2
2	22	23	1	11	13	1	11	12
3	32	33	3	31	33	2	21	22

Tabel 3.4. Varraste jäikusmaatriksid

Element nr 1			Element nr 2			Element nr 3		
Sõlm	2	3	Sõlm	1	3	Sõlm	1	2
2	$\mathbf{k}_{11}^{(1)}$	$\mathbf{k}_{12}^{(1)}$	1	$\mathbf{k}_{11}^{(2)}$	$\mathbf{k}_{12}^{(2)}$	1	$\mathbf{k}_{11}^{(3)}$	$\mathbf{k}_{12}^{(3)}$
3	$\mathbf{k}_{21}^{(1)}$	$\mathbf{k}_{22}^{(1)}$	3	$\mathbf{k}_{21}^{(2)}$	$\mathbf{k}_{22}^{(2)}$	2	$\mathbf{k}_{21}^{(3)}$	$\mathbf{k}_{22}^{(3)}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{11}^{(3)} &= \mathbf{k}_{22}^{(3)} = \mathbf{k}^{(3)} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{k}_{12}^{(3)} &= \mathbf{k}_{21}^{(3)} = -\mathbf{k}^{(3)}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Koostame tasakaaluvõrrandite süsteemi alammaatriksite abil

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(2)} + \mathbf{k}_{11}^{(3)} & \vdots & \mathbf{k}_{12}^{(3)} & \vdots & \mathbf{k}_{12}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{k}_{21}^{(3)} & \vdots & \mathbf{k}_{11}^{(1)} + \mathbf{k}_{22}^{(3)} & \vdots & \mathbf{k}_{12}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{k}_{21}^{(2)} & \vdots & \mathbf{k}_{21}^{(1)} & \vdots & \mathbf{k}_{22}^{(1)} + \mathbf{k}_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \dots \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \dots \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ \dots \\ F_{x2} \\ F_{z2} \\ \dots \\ F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

Võrrandisüsteem (3.39) on sümmeetriline. Võttes arvesse alammaatriksite avaldised (3.36),

(3.37) ja (3.38), saame

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cdot & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cdot & \cdot & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \\ F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Siirded u_3, v_3 leiame võrrandisüsteemi (3.40) kahest viimasest võrrandist

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Võrrandisüsteemi (3.41) lahend on

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Jõud sõlmedes $\boxed{1}$ ja $\boxed{2}$ leiame võrrandisüsteemi (3.40) esimesest neljast võrrandist

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{z2} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

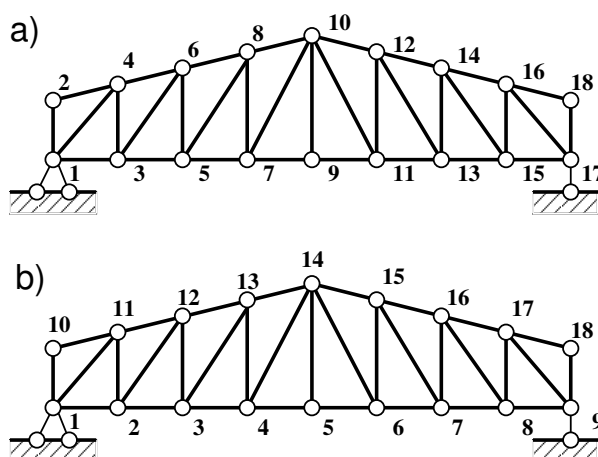
Varda $\boxed{1}$ sisejõud N_1

$$N_1 = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} = F_{x3} - F_{z3} \quad (3.44)$$

Varda $\boxed{2}$ sisejõud N_2

$$N_2 = \frac{EA}{l\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{x3} \\ F_{z3} \end{bmatrix} = \sqrt{2}F_{z3} \quad (3.45)$$

Kolmanda varda $\boxed{3}$ sisejõud $N_3 = 0$.

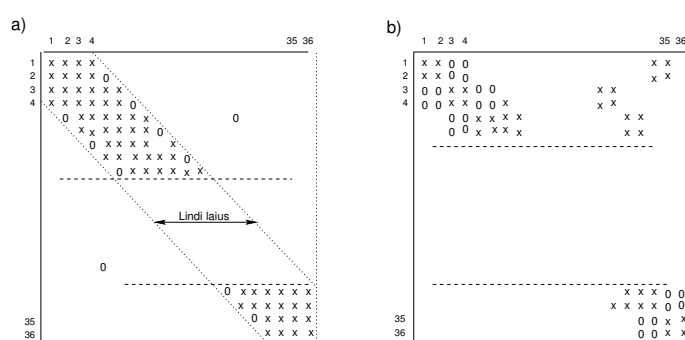


Joonis 3.6. Sõlmede nummerdamine

3.5 Sõlmede nummerdamisest

Tasakaaluvõrrandite vasaku poole maatriksid on hõredad maatriksid, s.o. siasaldavad palju nullelemente. Sõlmede nummerdamise järjekorrast sõltub varraste jäikusmaatriksi elementide asukoht tasakaaluvõrrandisüsteemis. Joonisel 3.6 on näidatud kahte sõlmede nummerdamisviisi.

Joonisel 3.6 a) näidatud nummerdamise tulemusel saadakse lintvõrrandisüsteemi maat-



Joonis 3.7. Võrrandisüsteemi kuju

riks (joonis 3.7 a)). Võrrandisüsteemi lahendamiseks, millel vasak pool on hõre maatriks, kasutatakse hõrdate võrrandisüsteemide lahendamise programme.

3.6 Varda paine

3.6.1 Ülekandemaatriks paindel

Diferentsiaalseosed varda paindel parema käe teljestikus x-z (joonis 3.8).

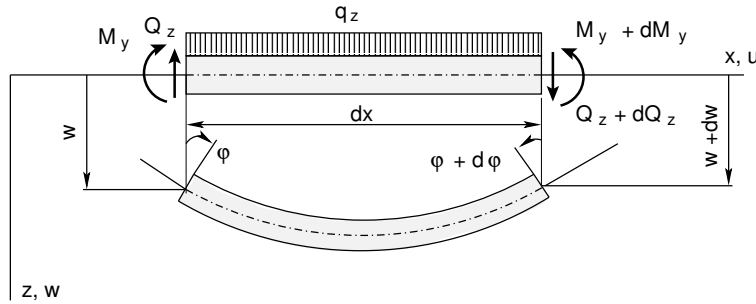
$$\frac{dw}{dx} = -\varphi_y \quad (3.46)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{d\varphi_y}{dx} = -\frac{1}{EI_y} M_y \quad (3.47)$$

$$\frac{dM_y}{dx} = Q_z \quad (3.48)$$

$$\frac{dQ_z}{dx} = q_z(x) \quad (3.49)$$

Avaldised (3.48), (3.49) on tala tasakaalu diferentsiaalvõrrandid paindel. Nende seoste tuletamist vaadeldakse tehnilises mehaanikas. Paine on üks varda tööseisundeid (joonis 3.9).

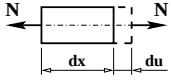
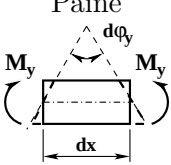
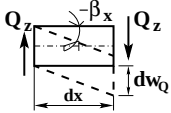
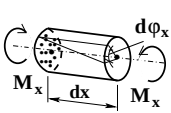


Joonis 3.8. Painde diferentsiaalseosed

Algpameetrite meetodi puhul arvutame tala sisejõude ([?] lk 28) M ja Q järgmiselt (vt joonis 3.10)

$$EI_y w_x = EI_y w_0 + EI_y \varphi_{y0} \cdot x + \mathcal{M} \cdot \frac{(x - a_{\mathcal{M}})^2}{2!} \cdot H(x - a_{\mathcal{M}}) - F \cdot \frac{(x - a_F)^3}{3!} \cdot H(x - a_F) - p \frac{(x - a_p)^4}{4!} H(x - a_p) \quad (3.50)$$

$$EI_y \varphi_{yx} = EI_y \varphi_{y0} + \mathcal{M} \cdot \frac{(x - a_{\mathcal{M}})^1}{1!} \cdot H(x - a_{\mathcal{M}}) + F \cdot \frac{(x - a_F)^2}{2!} \cdot H(x - a_F) - p \cdot \frac{(x - a_p)^3}{3!} \cdot H(x - a_p) \quad (3.51)$$

Tööseisund	Prinkus [MR95]	Sisejõud [MR96]	Ristlõike jäikus	Elastus- seosed	Deformatsiooni- energia [MR96]
Pike 	Pikkeprinkus $\lambda = \frac{du}{dx}$ $\lambda^* = \frac{\Lambda}{L}$ siin $\Lambda = \Delta u$	Pikkejõud N	Pikke- jäikus EA	$N = EA\lambda$	$dU_N = \frac{1}{2}N\lambda dx$
Paine 	Paindeprinkus $\psi = \frac{d\varphi_y}{dx}$ $\psi^* = \frac{\Psi}{L}$ siin $\Psi = \Delta\varphi_y$	Paindemo- ment M_y	Painde- jäikus EI_y	$M_y = EI_y\psi_y$	$dU_M = \frac{1}{2}M_y\psi_y dx$
Lõige 	Lõikeprinkus $-\beta_z = \frac{dw_Q}{dx}$ $-\beta_z^* = \frac{B_z}{L}$ siin $B_z = \Delta w_Q$	Põikjõud Q_z	Lõike- jäikus GA_{red}	$Q_Z = GA_{red}\beta_z$	$dU_Q = \frac{1}{2}Q_z\beta_z dx$
Vääne 	Väändeprinkus $\vartheta = \frac{d\varphi_x}{dx}$ $\vartheta^* = \frac{\Theta}{L}$ siin $\Theta = \Delta\varphi_x$	Väändemo- ment M_x	Väände- jäikus GI_x	$M_x = GI_x\vartheta$	$dU_\gamma = \frac{1}{2}M_x\vartheta dx$

Joonis 3.9. Varda tööseisundid

$$M_x = \mathcal{M} \cdot (x - a_{\mathcal{M}})^0 \cdot H(x - a_{\mathcal{M}}) - F \cdot \frac{(x - a_F)}{1!} \cdot H(x - a_F) - p \frac{(x - a_p)^2}{2!} H(x - a_p) \quad (3.52)$$

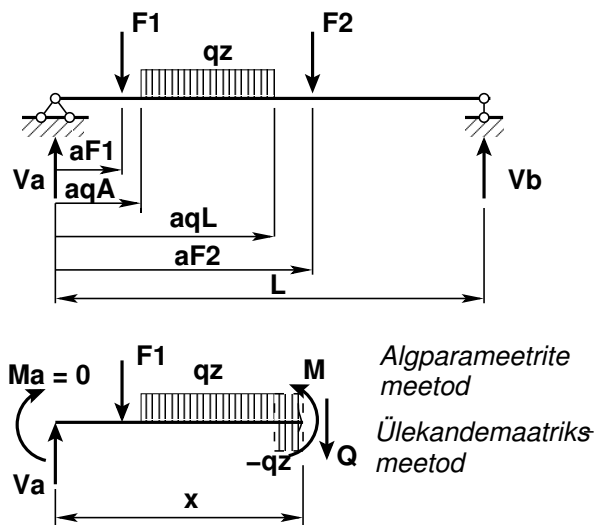
$$Q_x = F \cdot (x - a_F)^0 \cdot H(x - a_F) - p \cdot (x - a_p) \cdot H(x - a_p) \quad (3.53)$$

Avaldistes (3.50), (3.51), (3.52) ja (3.50) on $H(x - a_F)$ Heaviside'i¹ funktsioon.

$$H(x - a_F) = \begin{cases} 0, & kui \quad (x - a_F) < 0 \\ 1, & kui \quad (x - a_F) \geq 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

Võrrandeid (3.50), (3.51), (3.52) ja (3.53) nimetatakse ka ülekandevõrranditeks. Kirjutame võrrandid (3.52) ja (3.53) maatrikskujule (3.55), kus tala alguses olevad

¹ Oliver Heaviside, inglise füüsik ja elektriinsener, 1850–1925.

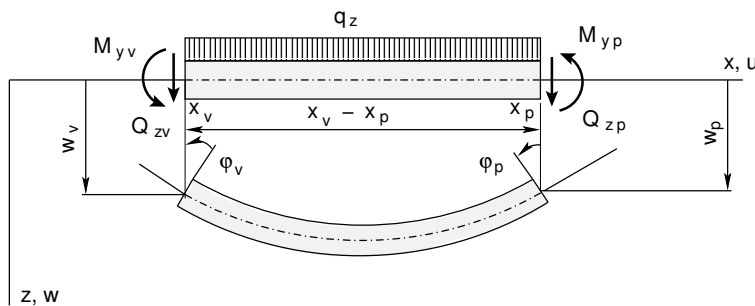


Joonis 3.10. Tala kahel toel

reaktsioonid (jõud) V_a ja M_a toome eraldi välja.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} Q_x \\ M_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ M_a = 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \cdot H(x - a_{F1}) \\ F_1 \cdot (x - a_{F1}) \cdot H(x - a_{F1}) \end{bmatrix} - \\
 &- \begin{bmatrix} F_2 \cdot H(x - a_{F2}) \\ F_2 \cdot (x - a_{F2}) \cdot H(x - a_{F2}) \end{bmatrix} - \\
 &- \begin{bmatrix} q_z \cdot (x - a_{qA}) \cdot H(x - a_{qA}) \\ q_z \frac{(x - a_{qA})^2}{2} H(x - a_{qA}) \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} q_z \cdot (x - a_{qL}) \cdot H(x - a_{qL}) \\ q_z \frac{(x - a_{qL})^2}{2} H(x - a_{qL}) \end{bmatrix} \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Ülekandevõrrandid (3.50), (3.51), (3.52), (3.53) II-märgikokkuleppe puhul (joonis 3.4 ja 3.11) maatrikskuul (3.56).



Joonis 3.11. Algparameetrid

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{U} \mathbf{Z}_v + \mathbf{\dot{Z}} \quad (3.56)$$

kus siirded ja kontaktjõud tala algul $\mathbf{Z}_v$ ja lõpus $\mathbf{Z}_p$ (joonis 3.11) on

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_p, \quad \mathbf{Z}_v = \begin{bmatrix} w \\ \varphi_y \\ Q_z \\ M_y \end{bmatrix}_v \quad (3.57)$$

ja ülekandemaatriks U II-märgikokkuleppe puhul (3.58)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -(x_p - x_v) & \frac{(x_p - x_v)^3}{6EI_y} & \frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} \\ 0 & 1 & -\frac{(x_p - x_v)^2}{2EI_y} & -\frac{(x_p - x_v)}{EI_y} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -(x_p - x_v) & -1 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

ning ülekandemeetodi koormusvektor $\mathring{\mathbf{Z}}$ (3.59) [12]

$$\mathring{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^2}{EI_y 2!} + \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^3}{EI_y 3!} + \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^4}{EI_y 4!} \\ - \sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^1}{EI_y 1!} - \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^2}{EI_y 2!} - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^3}{EI_y 3!} \\ - \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^0}{EI_y 0!} - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^1}{EI_y 1!} \\ - \sum \mathcal{M}_y \frac{(x_p - a_M)_+^0}{EI_y 0!} - \sum F_z \frac{(x_p - a_F)_+^1}{EI_y 1!} - \sum q_z \frac{(x_p - a_q)_+^2}{EI_y 2!} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Siin kasutatakse järgmist tähistust

$$(x - a_F)_+ = \begin{cases} 0, & kui \quad (x - a_F) < 0 \\ |x - a_F|, & kui \quad (x - a_F) \geq 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

3.6.2 Varda painde jäikusmaatriks

Teisendame ülekandevõrrandid (3.56) nii, et varda otstes olevad jõud avalduvad varda otste siirete ja pöörete kaudu (3.61)

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{K}^* \mathbf{d}^* + \mathring{\mathbf{F}}^* \quad (3.61)$$

kus

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} Q_{zv} \\ M_{yv} \\ Q_{zp} \\ M_{yp} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}^* = \begin{bmatrix} w_v \\ \varphi_{yv} \\ w_p \\ \varphi_{yp} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

ja jäikusmaatriks $\mathbf{K}^*$ (3.63) vastab II märgikokkuleppele

$$\mathbf{K}^* = EI_y \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

ning elemendile rakendatud jõud $\mathbf{F}^*$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^* = & \begin{bmatrix} \sum \mathcal{M}_y \left(\frac{6(x_p - a_M)_+^2}{l^3} - \frac{6(x_p - a_M)_+}{l^2} \right) \\ \sum \mathcal{M}_y \left(-\frac{3(x_p - a_M)_+^2}{l^2} + \frac{2(x_p - a_M)_+}{l} \right) \\ \sum \mathcal{M}_y \left(-\frac{6(x_p - a_M)_+^2}{l^3} + \frac{6(x_p - a_M)_+}{l^2} \right) \\ \sum \mathcal{M}_y \left(-\frac{3(x_p - a_M)_+^2}{l^2} + \frac{4(x_p - a_M)_+}{l} - \frac{(x_p - a_M)_+^0}{0!} \right) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \sum F_z \left(\frac{2(x_p - a_F)_+^3}{l^3} - \frac{3(x_p - a_F)_+^2}{l^2} \right) \\ \sum F_z \left(-\frac{(x_p - a_F)_+^3}{l^2} + \frac{(x_p - a_F)_+^2}{l} \right) \\ \sum F_z \left(-\frac{2(x_p - a_F)_+^3}{l^3} + \frac{3(x_p - a_F)_+^2}{l^2} + \frac{(x_p - a_F)_+^0}{0!} \right) \\ \sum F_z \left(-\frac{(x_p - a_F)_+^3}{l^2} + \frac{2(x_p - a_F)_+^2}{l} + \frac{(x_p - a_F)_+^1}{1!} \right) \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \sum q_z \left(\frac{(x_p - a_q)_+^4}{2l^3} - \frac{(x_p - a_q)_+^3}{l^2} \right) \\ \sum q_z \left(-\frac{(x_p - a_q)_+^4}{4l^2} + \frac{(x_p - a_q)_+^3}{3l} \right) \\ \sum q_z \left(-\frac{(x_p - a_q)_+^4}{2l^3} + \frac{(x_p - a_q)_+^3}{l^2} - \frac{(x_p - a_q)_+^1}{1!} \right) \\ \sum q_z \left(-\frac{(x_p - a_q)_+^4}{4l^2} + \frac{2(x_p - a_q)_+^3}{3l} - \frac{(x_p - a_q)_+^{21}}{2} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Teisendusmaatriks $\mathbf{T}$ paindel

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Jäikusmaatriks üldkoordinaatides $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^* \mathbf{T} \quad (3.66)$$

Varda elemendile rakendatud jõud $\mathbf{F}$ üldkoordinaatides

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}^* \quad (3.67)$$

Varda elemendi tasakaaluvõrrand üldkoordinaatides

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{F} \quad (3.68)$$

Peatükk 4

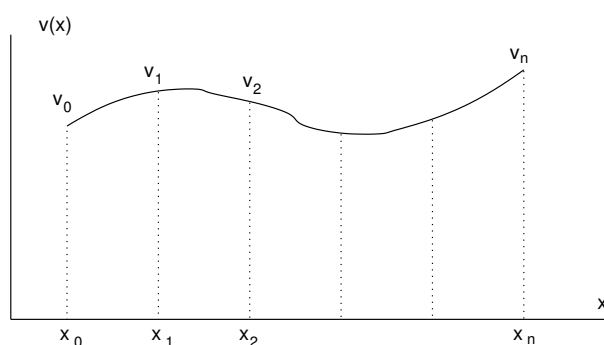
Interpoleerimine

4.1 Lagrange'i interpolatsioon

Kirjeldame funktsiooni $v(x)$ polünoomiga $P^n(x)$

$$v(x) = P^n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (4.1)$$

Avaldise (4.1) kirjutame maatrikskujul



Joonis 4.1. Funktsiooni interpolatsioon

$$v(x) = P^n(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

ehk veel lühemalt

$$v(x) = P^n(x) = [x] [a] \quad (4.3)$$

Olgu teada funktsiooni väärtused $n+1$ punktis (joonis 4.1). Punktis x_0 on funktsiooni väärtus v_0 , punktis x_1 on funktsiooni väärtus v_1 ja punktis x_n on funktsiooni väärtus

v_n . Punkte, kus on antud funktsiooni väärtused, nimetatakse polünoomi sõlmedeks. Kirjeldame polünoomi (4.2) abil neid väärtusi

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ehk sümboolselt

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{a} \quad (4.5)$$

Otsitavad parameetrid $\mathbf{a}$ leiame võrrandist (4.5)

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \quad (4.6)$$

Nüüd on polünoomis (4.3) parameetrid (4.6) määratud

$$v(x) = P^n(x) = \mathbf{x}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} \quad (4.7)$$

Kirjutame avaldise (4.7) lahti

$$v(x) = \mathcal{L}_0^n(x) v_0 + \mathcal{L}_1^n(x) v_1 + \mathcal{L}_2^n(x) v_2 + \dots + \mathcal{L}_n^n(x) v_n \quad (4.8)$$

Kus Lagrang'i¹ interpolatsioonipolünoomi kordajad $\mathcal{L}_i^n(x)$ on

$$\mathcal{L}_0^n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_1^n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \quad (4.10)$$

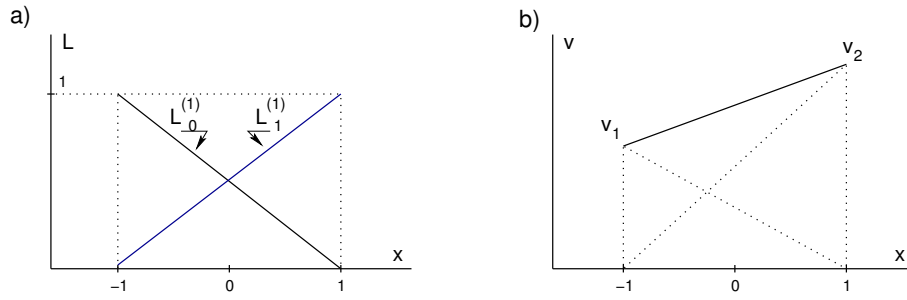
$$\mathcal{L}_n^n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})} \quad (4.11)$$

Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi kordajate $\mathcal{L}_i^n(x)$ sümboolne kuju

$$\mathcal{L}_i^n(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (4.12)$$

Vaatleme lineaarset interpolatsiooni vahemikus $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ (joonis 4.2)

¹Joseph Louis de Lagrange, prantsuse matemaatik ja mehaanikateadlane, 1736–1813.



Joonis 4.2. Lineaarne interpolatsioon

$$N_1(x) = \mathcal{L}_0^1(x) = \frac{(x-1)}{(-1-1)} = \frac{1}{2}(1-x) \quad (4.13)$$

$$N_2(x) = \mathcal{L}_1^1(x) = \frac{(x+1)}{(1+1)} = \frac{1}{2}(1+x) \quad (4.14)$$

Funktsiooni $v(x)$ saame interpoleerida väärtuste v_1 ja v_2 vahel (joonis 4.2 b)

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)v_2 \quad (4.15)$$

Lõplike elementide meetodis nimetatakse funktsioone N_i *kujufunktsioonideks* (vormifunktsioonideks).

Ruutinterpolatsiooni puhul vahemikus $x_0 = -1, x_2 = 1$ (joonis 4.3) on Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi kordajad

$$N_1(x) \equiv \mathcal{L}_0^{(2)}(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{1}{2}x(x-1) \quad (4.16)$$

$$N_2(x) \equiv \mathcal{L}_1^{(2)}(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = (1-x^2) \quad (4.17)$$

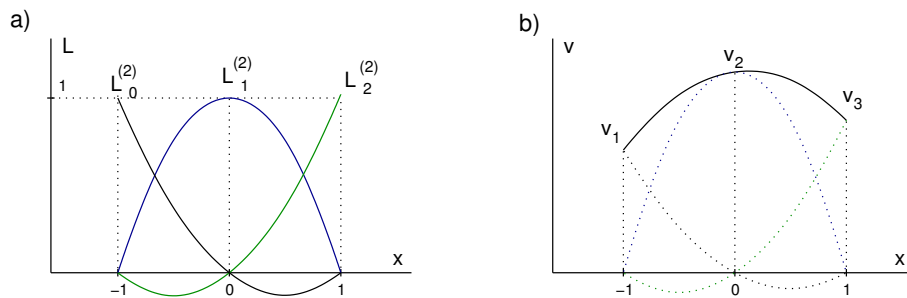
$$N_3(x) \equiv \mathcal{L}_2^{(2)}(x) = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1}{2}x(x+1) \quad (4.18)$$

Funktsiooni $v(x)$ saame interpoleerida väärtuste v_1 ja v_3 vahel (joonis 4.3 b)

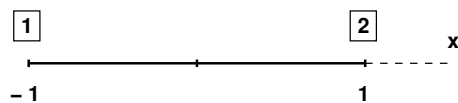
$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)v_2 + N_3(x)v_3 \quad (4.19)$$

Lineaarse interpolatsiooni kaudu (4.13), (4.14) sõlmede $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ (joonis 4.4) vahel

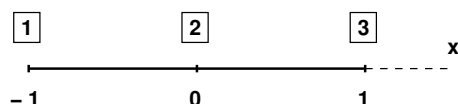
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}(1-x) \\ \mathcal{L}_1^{(1)}(x) &= \frac{1}{2}(1+x) \end{aligned} \quad (4.20)$$



Joonis 4.3. Ruutinterpolatsioon



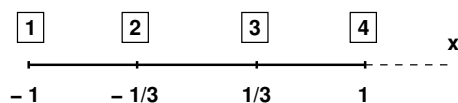
Joonis 4.4. Lineaarse interpolatsiooni sõlmed



Joonis 4.5. Ruutinterpolatsiooni sõlmed

saame avaldada kõrgemad interpolatsioonid

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^{(2)}(x) &= (1 - 2\mathcal{L}_1^{(1)}) \mathcal{L}_0^{(1)} \\ \mathcal{L}_1^{(2)}(x) &= 4\mathcal{L}_0^{(1)} \mathcal{L}_1^{(1)} \\ \mathcal{L}_2^{(2)}(x) &= (2\mathcal{L}_1^{(1)} - 1) \mathcal{L}_1^{(1)}\end{aligned}\tag{4.21}$$



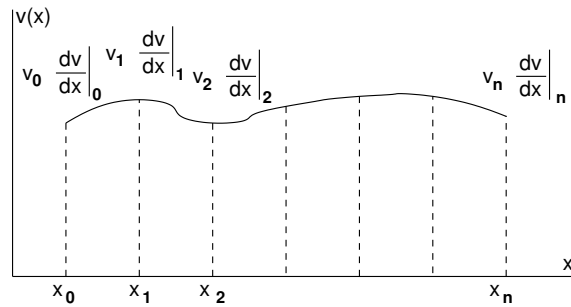
Joonis 4.6. Kuupinterpolatsiooni sõlmed

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0^{(3)}(x) &= \frac{1}{2} (1 - 3\mathcal{L}_1^{(1)}) (2 - 3\mathcal{L}_1^{(1)}) \mathcal{L}_0^{(1)} \\ \mathcal{L}_1^{(3)}(x) &= \frac{9}{2} \mathcal{L}_1^{(1)} (2 - 3\mathcal{L}_1^{(1)}) \mathcal{L}_0^{(1)} \\ \mathcal{L}_2^{(3)}(x) &= \frac{9}{2} \mathcal{L}_1^{(1)} (3\mathcal{L}_1^{(1)} - 1) \mathcal{L}_0^{(1)} \\ \mathcal{L}_3^{(3)}(x) &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_1^{(1)} (3\mathcal{L}_1^{(1)} - 1) (3\mathcal{L}_1^{(1)} - 2)\end{aligned}\tag{4.22}$$

4.2 Hermite'i interpolatsioon

Olgu antud funktsioon $v(x)$ ja tema tuletiste väärtused n sõlmpunktis, mille koordinaat on x_n

$$\begin{array}{ccccc}
 x_0, & x_1, & x_2, & \dots & x_n \\
 v_0, & v_1, & v_2, & \dots & v_n \\
 \frac{dv}{dx} \Big|_0, & \frac{dv}{dx} \Big|_1, & \frac{dv}{dx} \Big|_2, & \dots & \frac{dv}{dx} \Big|_n \\
 \frac{d^2v}{dx^2} \Big|_0, & \frac{d^2v}{dx^2} \Big|_1, & \frac{d^2v}{dx^2} \Big|_2, & \dots & \frac{d^2v}{dx^2} \Big|_n \\
 \vdots & \vdots, & \vdots, & \dots & \vdots \\
 \frac{d^k v}{dx^k} \Big|_0, & \frac{d^k v}{dx^k} \Big|_1, & \frac{d^k v}{dx^k} \Big|_2, & \dots & \frac{d^k v}{dx^k} \Big|_n
 \end{array}$$



Joonis 4.7. Hermite'i interpolatsioon

Funktsiooni lähendame ($m = 2n$)-astme polünoomiga

$$\begin{bmatrix} v(x) \\ \frac{dv}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^m \\ 0 & 1 & 2x & \dots & mx^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

ehk

$$v(x) = \mathbf{x} \mathbf{a} \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v'_0 \\ v_1 \\ v'_1 \\ v_2 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v_n \\ v'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 0 & 1 & 2x_0 & \dots & mx_0^{m-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 0 & 1 & 2x_1 & \dots & mx_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ 0 & 1 & 2x_2 & \dots & mx_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \\ 0 & 1 & 2x_n & \dots & mx_n^{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

ehk

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_H \mathbf{a} \quad (4.26)$$

Avaldisest (4.26) saame

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_H^{-1} \mathbf{v} \quad (4.27)$$

Funktsioon (4.24) avaldub nüüd järgmiselt:

$$v(x) = \mathbf{x} \mathbf{a} = \mathbf{x} \mathbf{A}_H^{-1} \mathbf{v} \quad (4.28)$$

Kirjutame avaldise (4.28) kujule

$$\begin{aligned} v(x) = \mathcal{H}_{00}^{(1)}(x) v_0 + \mathcal{H}_{10}^{(1)}(x) v'_0 + \mathcal{H}_{01}^{(1)}(x) v_1 + \mathcal{H}_{11}^{(1)}(x) v'_1 + \dots \\ \dots + \mathcal{H}_{0n}^{(1)}(x) v_n + \mathcal{H}_{1n}^{(1)}(x) v'_n \end{aligned} \quad (4.29)$$

ehk

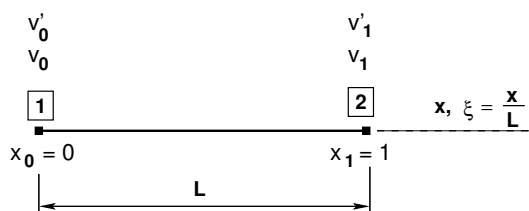
$$v(x) = \mathcal{H}_{0i}^{(1)}(x) v_i + \mathcal{H}_{1i}^{(i)}(x) v'_i \quad (i = 1, 2, \dots, 4) \quad (4.30)$$

kus Hermite'i² interpolatsioonipolünoomi kordajad $\mathcal{H}_{ij}^n$ on

$$\mathcal{H}_{0i}^{(1)}(x) = \left\{ 1 - 2(x - x_i) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{x_i - x_k} \right\} \{\mathcal{L}_i^{(1)}(x)\}^2 \quad (4.31)$$

$$\mathcal{H}_{1i}^{(1)}(x) = (x - x_i) \{\mathcal{L}_i^{(1)}(x)\}^2 \quad (4.32)$$

Kahe interpolatsioonisõlmega ja esimese tuletisega (joonis 4.8) on funktsiooni interpolatsioon järgmine:



Joonis 4.8. Hermite'i interpolatsiooni sõlmed

$$v(x) = \mathcal{H}_{00}^{(1)}(x) v_0 + \mathcal{H}_{10}^{(1)}(x) v'_0 + \mathcal{H}_{01}^{(1)}(x) v_1 + \mathcal{H}_{11}^{(1)}(x) v'_1 \quad (4.33)$$

²Charles Hermite, prantsuse matemaatik, 1822–1901.

Siin on Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid $\mathcal{H}_{ij}^{(n)}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{00}^{(1)}(x) &= \left(1 - 2\frac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 = \\ &= \left(1 + 2\frac{x}{L}\right) \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3\end{aligned}\quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{10}^{(1)}(x) &= (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 = \\ &= x \left(-\frac{x}{L} - \frac{L}{L}\right)^2 = L\xi(1 - \xi)^2\end{aligned}\quad (4.35)$$

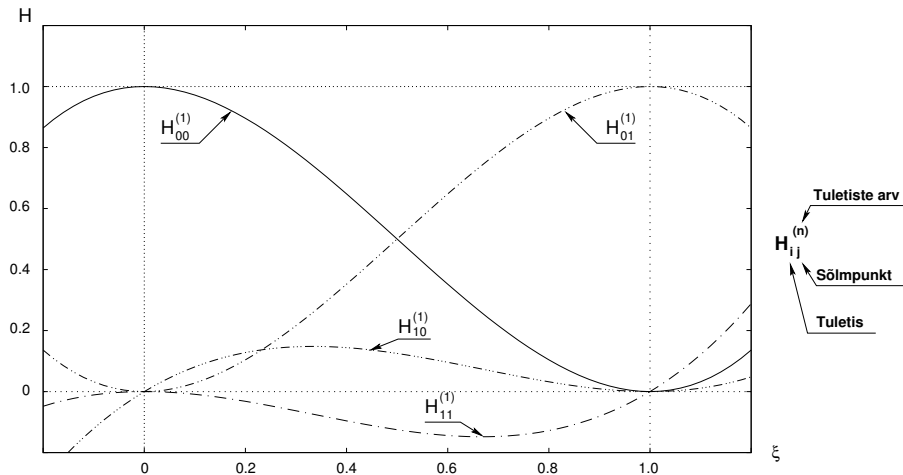
$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{01}^{(1)}(x) &= \left(1 - 2\frac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 = \\ &= \left(1 - 2\left(\frac{x}{L} - 1\right)\right) \left(\frac{x}{L}\right)^2 = 3\xi^2 - 2\xi^3\end{aligned}\quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{11}^{(1)}(x) &= (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 = \\ &= (L\xi - L) \left(\frac{x}{L}\right)^2 = L\xi^2(\xi - 1)^2\end{aligned}\quad (4.37)$$

Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid $\mathcal{H}_{ij}^{(n)}$ on näidatud joonisel 4.9.

Teades kahes sõlmpunktis funktsiooni ja tema kahe tuletise väärtust v_n, v'_n, v''_n , on Hermite'i interpolatsiooni valem järgmine:

$$\begin{aligned}v(x) &= \mathcal{H}_{00}^{(2)}(x) v_0 + \mathcal{H}_{10}^{(2)}(x) v'_0 + \mathcal{H}_{20}^{(2)}(x) v''_0 + \mathcal{H}_{01}^{(2)}(x) v_1 + \\ &\quad \mathcal{H}_{11}^{(2)}(x) v'_1 + \mathcal{H}_{21}^{(2)}(x) v''_1\end{aligned}\quad (4.38)$$



Joonis 4.9. Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid

Kasutades tähistust

$$x_2 - x_1 = L, \quad \frac{x}{L} = \xi \quad (4.39)$$

avaldame Hermite'i interpolatsioonifunktsioonid $\mathcal{H}_{ij}^{(2)}$

$$\mathcal{H}_{00}^{(2)}(\xi) = 1 - 10\xi^3 + 15\xi^4 - 6\xi^5 \quad (4.40)$$

$$\mathcal{H}_{10}^{(2)}(\xi) = L\xi(1 - 6\xi^2 + 8\xi^3 - 3\xi^4) \quad (4.41)$$

$$\mathcal{H}_{20}^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}L^2\xi^2(1 - 3\xi + 3\xi^2 - \xi^3) \quad (4.42)$$

$$\mathcal{H}_{01}^{(2)}(\xi) = 10\xi^3 - 15\xi^4 + 6\xi^5 \quad (4.43)$$

$$\mathcal{H}_{11}^{(2)}(\xi) = -L\xi(4\xi^2 + 7\xi^3 - 3\xi^4) \quad (4.44)$$

$$\mathcal{H}_{21}^{(2)}(\xi) = \frac{1}{2}L^2\xi^2(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad (4.45)$$

4.3 Interpoleerimine tasapinnal

4.3.1 Lagrange'i interpolatsioon tasapinnal

Kirjeldame funktsiooni $v(x, y)$ polünoomiga $P^n(x, y)$

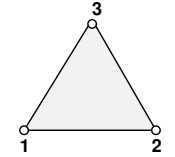
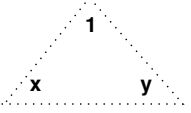
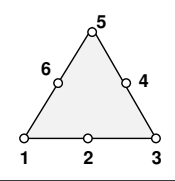
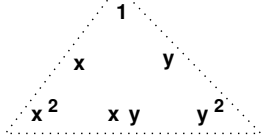
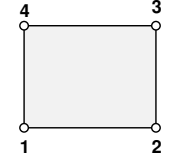
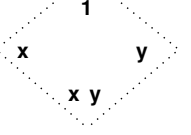
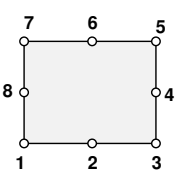
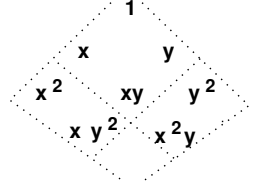
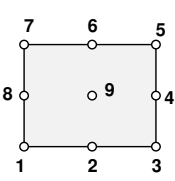
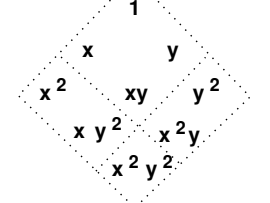
$$v(x, y) = P^n(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + \dots \quad (4.46)$$

Vaatleme polünoomi koordinaatidest moodustatud järgmist avaldist:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & x & & y & & \\ & & x^2 & & xy & & y^2 & & \\ x^3 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \\ & & x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \end{array} \quad (4.47)$$

Lõplike elementide meetodis nimetatakse avaldist (4.47) Pascali kolmnurgaks (sama nimetust kasutatakse ka binoomkordajatest moodustatud kolmnurkse tabeli puhul).

Joonisel 4.10 on põhilised elemendi tüübid, sõlmpunktide arv, polünoomis (4.46) kasutatavad koordinaadid ja funktsioonide integreerimisel kasutatav Gaussi integreerimissõlmede arv.

Elemendi tüüp	Sõlmpunktide arv	Polünoom	Integreerimis- punktide arv
	3		1
	6		7
	4		2 x 2
	8		3 x 3
	9		3 x 3

Joonis 4.10. Funktsiooni interpolateerimine tasapinnal

Kahemuutuja funktsiooni $v(\xi, \eta)$ anname järgmisel kujul

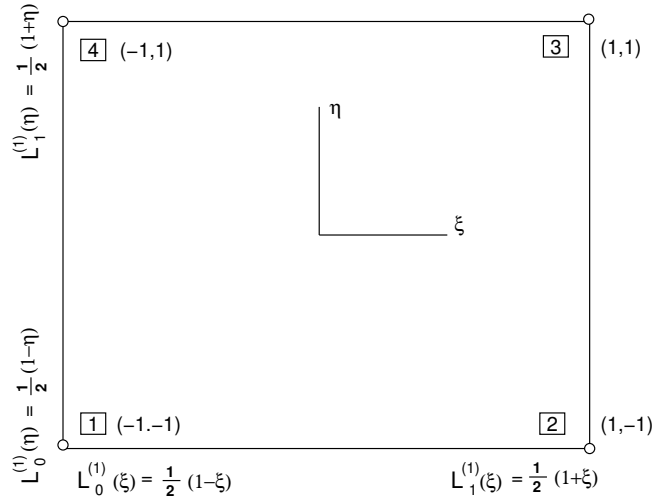
$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \mathcal{L}_i^{(n)}(\xi) \mathcal{L}_j^{(n)}(\eta) v_{ij} \quad (4.48)$$

kus v_{ij} on funktsiooni väärtus sõlmpunktis.

Sõlmpunktide koordinaadid ξ, η on joonisel 4.11. Esitame funktsiooni $v(\xi, \eta)$ kujufunktsioonide N_i ja sõlmpunktis $\boxed{i}$ oleva funktsiooni väärtuse v_i kaudu

$$v(\xi, \eta) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \quad (4.49)$$

Kujufunktsioonid $N_i(\xi, \eta)$ saab vastavate Lagrange'i funktsioonide $\mathcal{L}_i^{(n)}(\xi)$ ja $\mathcal{L}_j^{(n)}(\eta)$



Joonis 4.11. Lagrange'i funktsioonid tasapinnal

korrutamisega (joonis 4.11)

$$N_1(\xi, \eta) = \mathcal{L}_0^{(1)}(\xi) \mathcal{L}_0^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (4.50)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \mathcal{L}_1^{(1)}(\xi) \mathcal{L}_0^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (4.51)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \mathcal{L}_1^{(1)}(\xi) \mathcal{L}_1^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (4.52)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \mathcal{L}_0^{(1)}(\xi) \mathcal{L}_1^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (4.53)$$

Tähistades koordinaatide ξ, η väärtused sõlmedes ξ_i, η_i , saame avaldised (4.50), (4.51), (4.52), (4.53) kirjutada lühemalt

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \quad (i = 1, 2, \dots, 4) \quad (4.54)$$

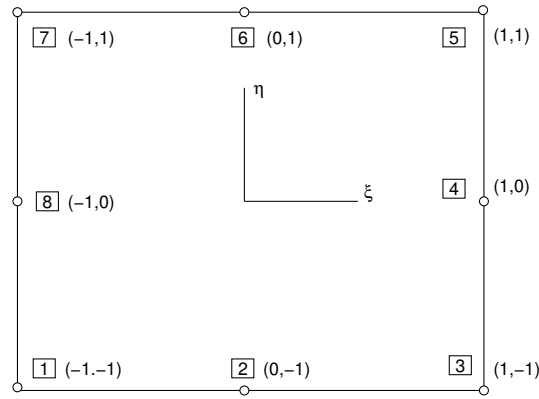
Kujufunktsioon $N_5(\xi, \eta)$ on joonisel 4.13.

Kaheksa sõlmpunktiga nelinurkse elemendi sõlmpunktide koordinaadid on joonisel 4.12. Funktsiooni $v(\xi, \eta)$ esitame kujufunktsioonide N_i ja sõlmpunktis $\boxed{i}$ oleva funktsiooni väärtuse v_i kaudu

$$v(\xi, \eta) = N_i v_i, \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (4.55)$$

kus

$$N_1(\xi, \eta) = \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) \mathcal{L}_0^{(2)}(\eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi - 1)\eta(\eta - 1) \quad (4.56)$$



Joonis 4.12. Sõlmpunktide koordinaadid

$$N_2(\xi, \eta) = \mathcal{L}_1^{(2)}(\xi) \mathcal{L}_0^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta) \quad (4.57)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \mathcal{L}_2^{(2)}(\xi) \mathcal{L}_0^{(2)}(\eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi + 1)\eta(\eta - 1) \quad (4.58)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) \mathcal{L}_1^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (4.59)$$

$$N_5(\xi, \eta) = \mathcal{L}_2^{(2)}(\xi) \mathcal{L}_2^{(2)}(\eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi + 1)\eta(\eta + 1) \quad (4.60)$$

$$N_6(\xi, \eta) = \mathcal{L}_1^{(2)}(\xi) \mathcal{L}_1^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta) \quad (4.61)$$

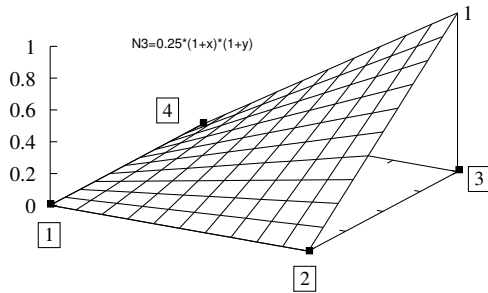
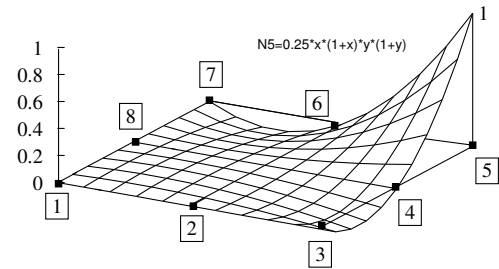
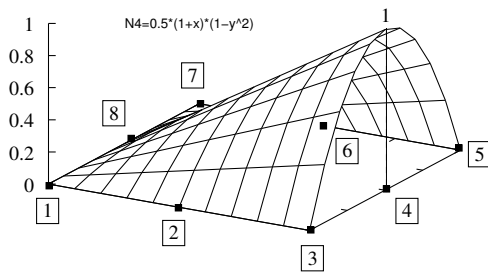
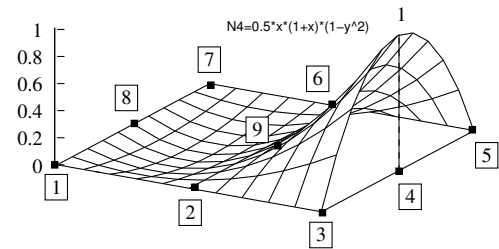
$$N_7(\xi, \eta) = \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) \mathcal{L}_2^{(2)}(\eta) = \frac{1}{4}\xi(\xi - 1)\eta(\eta + 1) \quad (4.62)$$

$$N_8(\xi, \eta) = \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) \mathcal{L}_1^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)(1 - \eta^2) \quad (4.63)$$

Koordinaatide ξ , η väärtuste kaudu sõlmedes ξ_i , η_i saame avaldised (4.56) ... (4.63) kirjutada lühemalt

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1), \quad (i = 1, 3, 5, 7) \quad (4.64)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i), \quad (i = 2, 6) \quad (4.65)$$

Joonis 4.13. Kujufunktsioon N_3 Joonis 4.14. Kujufunktsioon N_5 Joonis 4.15. Kujufunktsioon N_4 , 8 sõlmeJoonis 4.16. Kujufunktsioon N_4 , 9 sõlme

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i), \quad (i = 4, 8) \quad (4.66)$$

Kujufunktsioonid N_5 ja N_4 kaheksa sõlmpunkti puhul on joonisel 4.14 ja 4.15. Üheksa sõlmpunkti puhul on kujufunktsioonid järgmised:

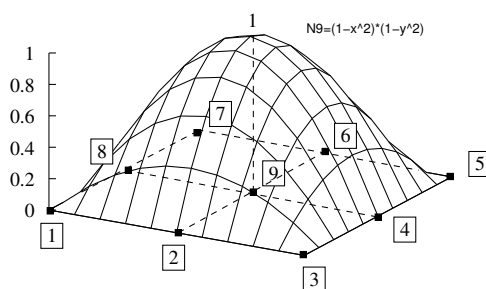
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\xi\xi_i\eta\eta_i(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \quad (i = 1, 3, 5, 7) \quad (4.67)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta\eta_i(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i), \quad (i = 2, 6) \quad (4.68)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\xi\xi_i(1 - \eta^2)(1 + \xi\xi_i), \quad (i = 4, 8) \quad (4.69)$$

$$N_9(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (4.70)$$

Kujufunktsioonid N_4 ja N_9 üheksa sõlmpunkti puhul on joonisel 4.16 ja 4.17.

Joonis 4.17. Kujufunktsioon N_9

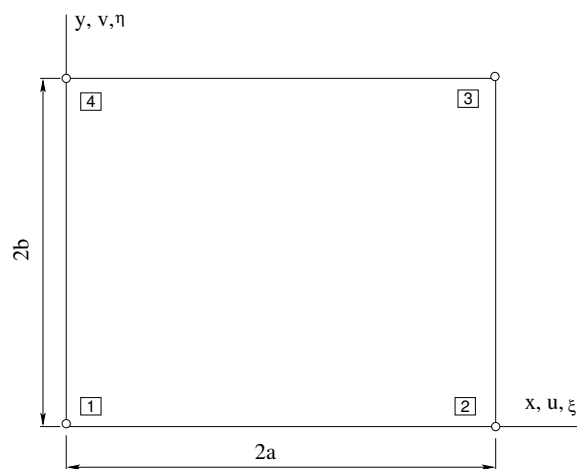
4.3.2 Hermite'i interpolatsioon tasapinnal

Vaatleme nelinurkset elementi mõõtmetega $2a$, $2b$ (joonis 4.18). Sõlmpunkti siiretest u , v ja nende tuletistest $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ koostame vektori $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ v \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Selle vektori väärtuse sõlmpunktis $[i]$ tähistame $\mathbf{d}_i$ -ga. Siirded u , v interpoleerime järgmiselt:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{N}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{N}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{N}_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{N}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{N}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$



Joonis 4.18. Hermite'i interpolatsioon tasapinnal

kus $\mathbf{0}$ on 2×3 nullmaatriks ja alammaatriksi $\mathbf{N}_i$ (2×3)elementideks on Hermite'i interpolatsiooni funktsioonid

$$\mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{00}^{(1)}(\xi) & \mathcal{H}_{10}^{(1)}(\xi) & \mathcal{H}_{00}^{(1)}(\eta) \\ \mathcal{H}_{00}^{(1)}(\eta) & \mathcal{H}_{00}^{(1)}(\eta) & \mathcal{H}_{10}^{(1)}(\eta) \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

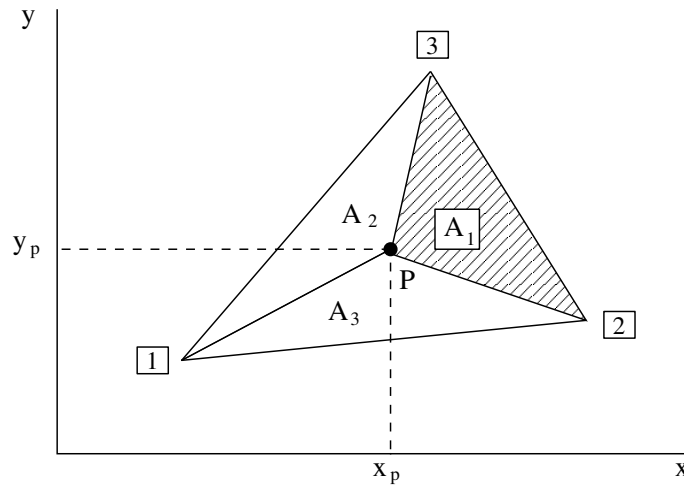
$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{01}^{(1)}(\xi) & \mathcal{H}_{11}^{(1)}(\xi) & \mathcal{H}_{01}^{(1)}(\eta) \\ \mathcal{H}_{00}^{(1)}(\eta) & \mathcal{H}_{00}^{(1)}(\eta) & \mathcal{H}_{10}^{(1)}(\eta) \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{01}^{(1)}(\xi) & \mathcal{H}_{11}^{(1)}(\xi) & \mathcal{H}_{01}^{(1)}(\eta) \\ \mathcal{H}_{01}^{(1)}(\eta) & \mathcal{H}_{01}^{(1)}(\eta) & \mathcal{H}_{11}^{(1)}(\eta) \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$\mathbf{N}_4 = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{00}^{(1)}(\xi) & \mathcal{H}_{10}^{(1)}(\xi) & \mathcal{H}_{00}^{(1)}(\eta) \\ \mathcal{H}_{01}^{(1)}(\eta) & \mathcal{H}_{01}^{(1)}(\eta) & \mathcal{H}_{11}^{(1)}(\eta) \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

4.3.3 Kolmnurga pindalakoordinaadid

Vaatleme tasapinnal x, y kolmnurkset elementi sõlmpunktidega $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, mille koordinaadid on (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) . Selle kolmnurga sees vabalt valitud punkti P koordinaadid on (x_p, y_p) , (joonis 4.19). Olgu sõlmpunktidega antud kolmnurga pindala



Joonis 4.19. Kolmnurga pindalakoordinaadid

A_Δ . Selle pindala jagame kolmeks pindalaks A_1 , A_2 , A_3 , millel on ühine tipp P

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_\Delta \quad (4.77)$$

Jagame avaldise (4.77) pindalaga A_Δ , saame

$$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = 1 \quad (4.78)$$

kus kolmnurga pindalakoordinaadid $\mathcal{L}_i$ on

$$\mathcal{L}_1 = \frac{A_1}{A_\Delta}, \quad \mathcal{L}_2 = \frac{A_2}{A_\Delta}, \quad \mathcal{L}_3 = \frac{A_3}{A_\Delta} \quad (4.79)$$

Kolmnurga pindalakoordinaatides $\mathcal{L}_i$ on

- sõlmpunkt $\boxed{1}$

$$\mathcal{L}_1 = 1, \quad \mathcal{L}_2 = 0, \quad \mathcal{L}_3 = 0 \quad (4.80)$$

- sõlmpunkt $\boxed{2}$

$$\mathcal{L}_1 = 0, \quad \mathcal{L}_2 = 1, \quad \mathcal{L}_3 = 0 \quad (4.81)$$

- sõlmpunkt $\boxed{3}$

$$\mathcal{L}_1 = 0, \quad \mathcal{L}_2 = 0, \quad \mathcal{L}_3 = 1 \quad (4.82)$$

Kolmnurga pindalad saab arvutada determinantide kaudu

$$\begin{aligned} A_\Delta &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, & A_1 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_p & y_p \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ A_2 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_p & y_p \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, & A_3 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_p & y_p \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Selgitame indeksite i, j ja k tsüklilist paigutust:

- avaldist $(i, j, k = 1, 2, 3)$ tuleb lugeda: kui $i = 1$, siis $j = 2$ ja $k = 3$
- avaldist $(i, j, k = 2, 3, 1)$ tuleb lugeda: kui $i = 2$, siis $j = 3$ ja $k = 1$
- avaldist $(i, j, k = 3, 1, 2)$ tuleb lugeda: kui $i = 3$, siis $j = 1$ ja $k = 2$

Avaldame kolmnurga pindalakoordinaadid $\mathcal{L}_i$ vabalt valitud punkti koordinaatide (x_p, y_p) kaudu

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A_\Delta} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Maatriksi elemendid a_i, b_i ja c_i saame indeksite tsüklilise ümberpaigutusega järgmistest avaldistest:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & b_i &= y_j - y_k \\ c_i &= x_k - x_j, & (i, j, k &= 1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Pöördseosed punkti koordinaatide (x_p, y_p) ja kolmnurga pindalakoordinaatide $\mathcal{L}_i$ vahel on

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

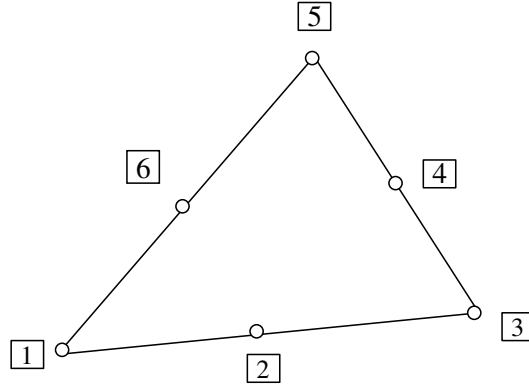
Funktsiooni interpoleerimine kujufunktsioonide (kolmnurga pindalakoordinaatide) abil

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \quad (4.87)$$

kus

$$N_1 = \mathcal{L}_1, \quad N_2 = \mathcal{L}_2, \quad N_3 = \mathcal{L}_3$$

Kuue sõlmpunktiga kolmnurkse elemendi (joonis 4.20) kujufunktsioonid on toodud avaldistega (4.88)

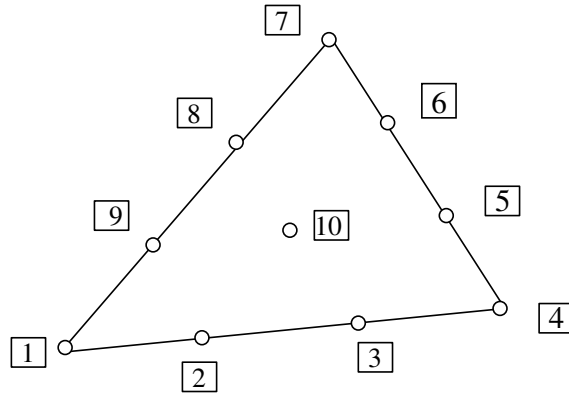


Joonis 4.20. 6 sõlmpunktiga kolmnurkne element

$$\begin{aligned} N_1 &= (2\mathcal{L}_1 - 1) \mathcal{L}_1, & N_2 &= 4\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \\ N_3 &= (2\mathcal{L}_2 - 1) \mathcal{L}_2, & N_4 &= 4\mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 \\ N_5 &= (2\mathcal{L}_3 - 1) \mathcal{L}_3, & N_6 &= 4\mathcal{L}_3 \mathcal{L}_1 \end{aligned} \quad (4.88)$$

Kümne sõlmpunktiga kolmnurkse elemendi (joonis 4.21) kujufunktsioonid on toodud avaldistega (4.89)

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2} (3\mathcal{L}_1 - 1) (3\mathcal{L}_1 - 2) \mathcal{L}_1, & N_2 &= \frac{9}{2} \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 (3\mathcal{L}_1 - 1) \\ N_3 &= \frac{9}{2} \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 (3\mathcal{L}_2 - 1), & N_4 &= \frac{1}{2} (3\mathcal{L}_2 - 1) (3\mathcal{L}_2 - 2) \mathcal{L}_2 \\ N_5 &= \frac{9}{2} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 (3\mathcal{L}_2 - 1), & N_6 &= \frac{9}{2} \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 (3\mathcal{L}_3 - 1) \\ N_7 &= \frac{1}{2} (3\mathcal{L}_3 - 1) (3\mathcal{L}_3 - 2) \mathcal{L}_3, & N_8 &= \frac{9}{2} \mathcal{L}_3 \mathcal{L}_1 (3\mathcal{L}_3 - 1) \\ N_9 &= \frac{9}{2} \mathcal{L}_3 \mathcal{L}_1 (3\mathcal{L}_1 - 1), & N_{10} &= 27 \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_3 \end{aligned} \quad (4.89)$$



Joonis 4.21. 10 sõlmpunktiga kolmnurkne element

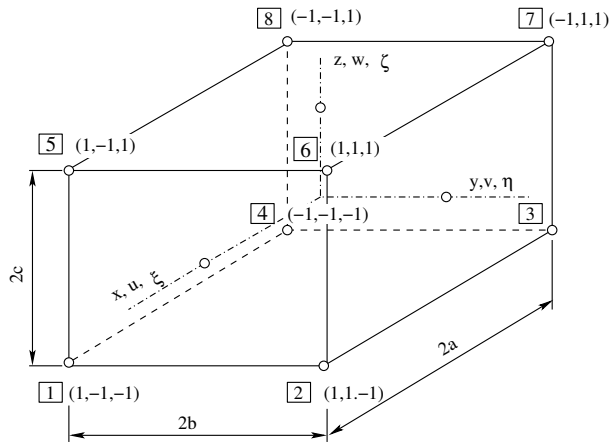
4.4 Interpoleerimine ruumis

4.4.1 Lagrange'i interpolatsioon ruumis

Lähendame funktsiooni $v(x, y, z)$ polünoomiga $P^n(x, y, z)$

$$v(x, y, z) = P^n(x, y, z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + \dots \quad (4.90)$$

Vaatleme kaheksa sõlmpunktiga elementi (joonis 4.22). Olgu ristküliku külgede pikku-



Joonis 4.22. Lagrange'i interpolatsioon ruumis

sed $2a$, $2b$, $2c$. Võtame kasutusele mõõduta koordinaadid ξ , η , ζ

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{c} \quad (4.91)$$

Kujufunktsiooni N_i saame Lagrange' interpolatsioonifunktsioonide $\mathcal{L}_i^{(1)}$ korrutisena

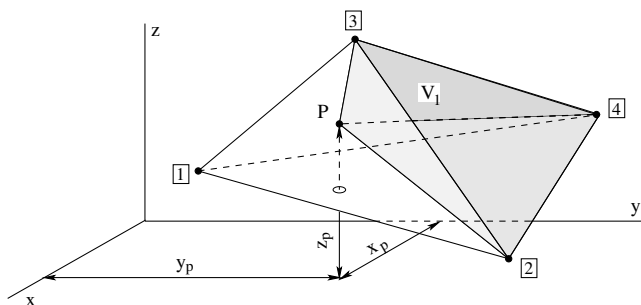
$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \mathcal{L}_i^{(1)}(\xi) \mathcal{L}_i^{(1)}(\eta) \mathcal{L}_i^{(1)}(\zeta) \quad (4.92)$$

ehk

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi)\eta(1 + \eta)(1 + \zeta), \quad (i = 1, 2, \dots, 8) \quad (4.93)$$

4.4.2 Ruumalakoordinaadid

Analoogiliselt kolmnurga pindalakoordinaatidega, võtame kasutusele ruumalakoordinaadid $\mathcal{L}_i$. Vaatleme tetraeedrit (joonis 4.23). Selle tippude koordinaadid (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_4, z_4) valime interpolatsioonisõlmedeks.



Joonis 4.23. Ruumalakoordinaadid

Tetraeedri sees vabalt valitud punkti P koordinaadid (x_p, y_p, z_p) avalduvad ruumalakoordinaatide $\mathcal{L}_i$ kaudu järgmiselt:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Avaldame ruumalakoordinaadid $\mathcal{L}_i$ vabalt valitud punkti koordinaatide (x_p, y_p, z_p) kaudu

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \\ \mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2V_\Delta} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

kus tetraeedri ruumala V_Δ arvutame determinandi abil

$$V_\Delta = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (4.96)$$

Maatriksi elemendid a_i , b_i , c_i , ja d_i saab indeksite tsüklilise ümberpaigutusega järgmisest avaldistest:

$$a_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{vmatrix}, \quad b_i = - \begin{vmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_l & z_l \end{vmatrix}$$

$$c_i = \begin{vmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_l & 1 & z_l \end{vmatrix}, \quad d_i = \begin{vmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_l & y_l & 1 \end{vmatrix}$$

$$(i, j, k, l = 1, 2, 3, 4; \quad 2, 3, 4, 1; \quad 3, 4, 1, 2; \quad 4, 1, 2, 3) \quad (4.97)$$

Peatükk 5

Numbriline integreerimine

5.1 Sissejuhatavad märkused ja määrangud

Vaatleme määratud integraali ligikaudse väärtuse leidmist funktsioonist $f(x)$

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \dots + A_n f(x_n) + E(f(x)) \quad (5.1)$$

siin

- x_k – integreerimispunktid (sõlmed)
- A_k – integreerimiskordajad (kaalud)
- $E(f(x))$ – aproksimatsiooniviga
- $w(x)$ – kaalufunktsioon

Määratud integraali ligikaudse väärtuse leidmiseks kasutatakse

- Newtoni-Cotes'i valemit
- Gaussi valemit
- Rombergi valemit

Funktsiooni kirjeldamiseks kasutame Lagrange'i interpolatsiooni (4.8)

$$v(x) = \mathcal{L}_0^{(n)}(x) v_0 + \mathcal{L}_1^{(n)}(x) v_1 + \mathcal{L}_2^{(n)}(x) v_2 + \dots + \mathcal{L}_n^{(n)}(x) v_n + E[v; x] \quad (5.2)$$

siin on $E[v; x]$ aproksimatsiooniviga.

Korrutame avaldise (5.2) kaalufunktsiooniga $w(x)$ ja integreerime üle piirkonna $[a, b]$

$$\int_a^b w(x) v(x) dx = \int_a^b w(x) \mathcal{L}_i^{(n)}(x) v_i dx + \int_a^b w(x) E[v; x] dx \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (5.3)$$

Võrdleme saadud tulemust (5.3) avaldisega (5.1), saame

$$A_i = \int_a^b w(x) \mathcal{L}_i^{(n)}(x) dx \quad , \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (5.4)$$

ja

$$E(f(x)) = \int_a^b w(x) E[v; x] dx \quad (5.5)$$

Järgnevalt vaatleme ortogonaalseid polünoome $P^{(n)}(x)$ lõigul $[a, b]$. Lõigul $[a, b]$ kaalufunktsiooniga $w(x)$ on ortogonaalsed polünoomid ühe muutuja polünoomide jada $\{P^{(n)}\}$, milles iga $P^{(n)}$ on täpselt n -astme polünoom, ja $n \neq m$ korral

$$\int_a^b w(x) P^{(n)}(x) P^{(m)}(x) dx = 0 \quad (5.6)$$

Legendre'i, Tšebõšovi, Jacobi, Hermite'i, Laguerre'i polünoomide puhul on kaalufunktsioonid toodud tabelis.

Tabel 5.1. Ortogonaalsete polünoomide kaalufunktsioonid

Intervall	Kaalufunktsioon $w(x)$	Polünoom
$[-1, +1]$	1	Legendre'i
$[-1, +1]$	$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$	Tšebõšovi I-liiki
$[-1, +1]$	$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$	Tšebõšovi II-liiki
$[-1, +1]$	$(1 - x^2)^\alpha (1 + x^2)^\beta$ $\alpha > -1, \beta < -1$	Jacobi
$[-\infty, +\infty]$	e^{-x^2}	Hermite'i
$[0, +\infty]$	e^{-x}	Laguerre'i

Ortogonaalse polünoomi sõlmede $x_0, x_1, x_2, \dots, x_l$ kaudu saab polünoomi esitada järgmisel kujul:

$$P^{(n)}(x) = (x - x_0)^{m_0} (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_l)^{m_l} \quad (5.7)$$

kus $m_0, m_1, m_2, \dots, m_l$ on reaalsed ja erinevad ning

$$m_0 + m_1 + m_2 + \dots + m_l = n \quad (5.8)$$

Legendre'i polünoomid

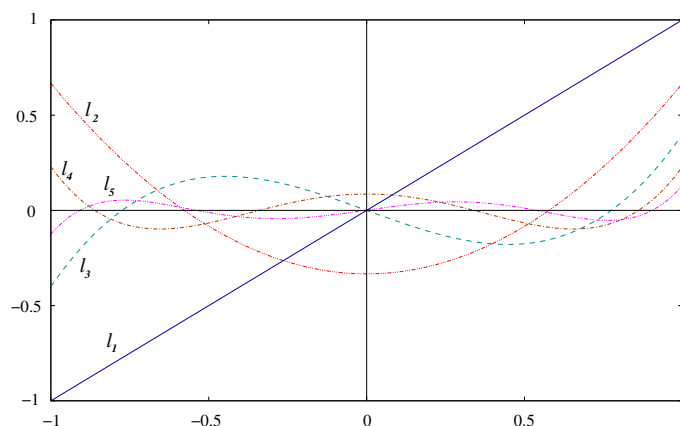
Kasutame Legendre'i polünoomide saamiseks Rodriguesi valemit

$$P^{(n)} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad 80 \quad (5.9)$$

Esitame mõned Legendre'i polünoomid $P^{(n)}$ ja $l^{(n)}$

$$\begin{aligned}
 P_0 &= 1, & l_0 &= 1 \\
 P_1 &= x, & l_1 &= x \\
 P_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), & l_2 &= \frac{1}{3}(3x^2 - 1) \\
 P_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), & l_3 &= \frac{1}{5}(5x^3 - 3x) \\
 P_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), & l_4 &= \frac{1}{35}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
 P_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), & l_5 &= \frac{1}{63}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Normeeritud Legendre'i polünoomid $l^{(n)}$ on joonisel 5.1.



Joonis 5.1. Legendre'i polünoomid

Legendre'i polünoomid $l^{(n)}$ saab esitada kujul

$$\begin{aligned}
 l_2(\xi) &= \frac{1}{3}(5\xi^2 - 3\xi) = \left(\xi - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \left(\xi + \sqrt{\frac{1}{3}}\right) \\
 l_3(\xi) &= \frac{1}{5}(5\xi^3 - 3\xi) = \xi \left(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}}\right) \left(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Legendre'i polünoomi $l^{(2)}$ sõlmed $-\sqrt{\frac{1}{3}}, +\sqrt{\frac{1}{3}}$,

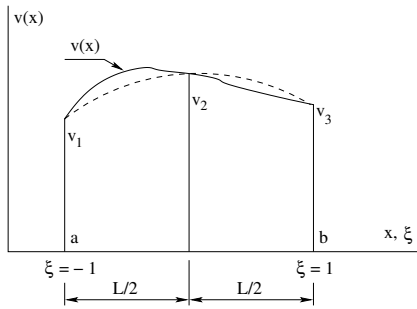
polünoomi $l^{(3)}$ sõlmed $0, -\sqrt{\frac{3}{5}}, +\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Legendre'i polünoomide $l^{(n)}$ sõlmed on tabuleeritud ja toodud käsiraamatutes.

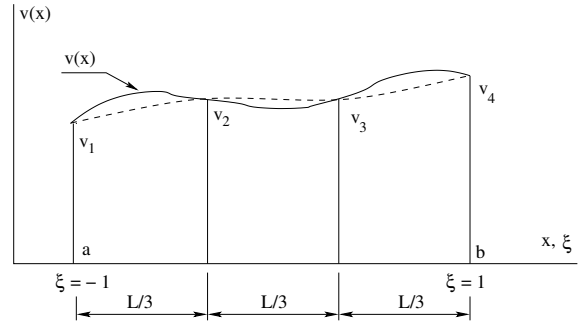
5.2 Newtoni-Cotes'i valemid

Vaatleme funktsiooni $v(x)$ lõigul $[a, b]$ (joonis 5.2). Olgu teada funktsiooni väärtused lõigu alguses v_1 , keskel v_2 ja lõpus v_3 ning kaalufunktsioon $w(x) = 1$. Kasutame mõõduta koordinaate

$$\xi = \frac{2x}{L}, \quad dx = \frac{1}{2}Ld\xi \tag{5.12}$$



Joonis 5.2. Simpsoni valem

Joonis 5.3. Simpsoni $\frac{3}{8}$ valem

Funktsiooni v_x interpoleerime Lagrange'i kujufunktsioonidega kolmes sõlmes

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x) dx &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} v(\xi) d\xi = \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} (N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3) d\xi = \\ &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) v_1 + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \xi^2) v_2 + \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) v_3 \right] d\xi = \frac{L}{6} [v_1 + 4v_2 + v_3] \end{aligned} \quad (5.13)$$

Valemit (5.13) nimetatakse Simpsoni valemiks.

Olgu teada funktsiooni väärtused lõigu alguses v_1 , ühel kolmandikul v_2 , teisel kolmandikul v_3 ja lõpus v_4 (joonis 5.3). Interpoleerime funktsiooni v_x Lagrange'i kujufunktsioonidega neljas sõlmes

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x) dx &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} v(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} (N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4) d\xi = \\ &= \frac{L}{8} [v_1 + 3v_2 + 3v_3 + v_4] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Valemit (5.14) nimetatakse Simpsoni $\frac{3}{8}$ valemiks.

5.3 Gaussi valemid

Lähendame funktsiooni $v(\xi)$ järgmiselt:

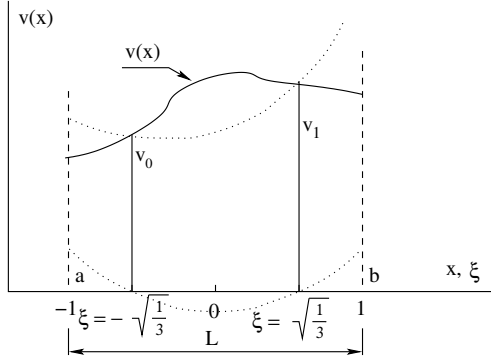
$$v(\xi) = \mathcal{L}_0^{(1)}(\xi) v_0 + \mathcal{L}_1^{(1)}(\xi) v_1 \quad (5.15)$$

kus interpolatsioonipolünoomi $\mathcal{L}_i^{(n)}(\xi)$ interpolatsioonisõlmedeks võetakse Legendre'i polünoomi sõlmed (joonis 5.4)

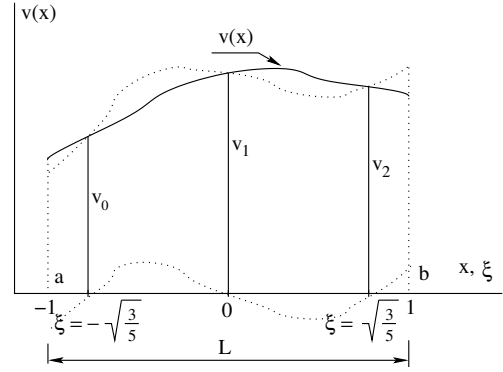
$$\mathcal{L}_0^{(1)}(\xi) = \frac{\xi - \sqrt{\frac{1}{3}}}{-\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}\xi$$

$$\mathcal{L}_1^{(1)}(\xi) = \frac{\xi + \sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}\xi \quad (5.16)$$

Integraal funktsioonist $v(x)$ on



Joonis 5.4. Gaussi kaks sõlme



Joonis 5.5. Gaussi kolm sõlme

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x) dx &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} v(\xi) d\xi = \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_0^{(1)}(\xi) v_0 d\xi + \\ &+ \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^{(1)}(\xi) v_1 d\xi = \frac{1}{2}L \left[A_0 v_0 \left(-\sqrt{\frac{1}{3}} \right) + A_1 v_1 \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

kus

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_0^{(1)}(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}\xi \right) d\xi = 1 \\ A_1 &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^{(1)}(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}}\xi \right) d\xi = 1 \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$A_0 + A_1 = 2$$

$$(5.19)$$

Kolme Gaussi integreerimissõlme puhul (joonis 5.5) on funktsiooni lähendus

$$v(\xi) = \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) v_0 + \mathcal{L}_1^{(2)}(\xi) v_1 + \mathcal{L}_2^{(2)}(\xi) v_2 \quad (5.20)$$

siin

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) &= \frac{(\xi - 0)(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}})}{(-\sqrt{\frac{3}{5}} - 0)(-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}})} = \frac{5}{6}\xi \left(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \\ \mathcal{L}_1^{(2)}(\xi) &= \frac{(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}})(\xi - \sqrt{\frac{3}{5}})}{(0 + \sqrt{\frac{3}{5}})(0 - \sqrt{\frac{3}{5}})} = -\frac{5}{3} \left(\xi^2 - \frac{3}{5} \right) \\ \mathcal{L}_2^{(2)}(\xi) &= \frac{(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}})(\xi - 0)}{(\sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{3}{5}})(\sqrt{\frac{3}{5}} - 0)} = \frac{5}{6}\xi \left(\xi + \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Integraal funktsioonist $v(x)$ on

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x) dx &= \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} v(\xi) d\xi = \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) v_0 d\xi + \\ &+ \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^{(2)}(\xi) v_1 d\xi + \frac{1}{2}L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_2^{(2)}(\xi) v_2 d\xi = \\ &= \frac{1}{2}L \left[A_0 v_0 \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} \right) + A_1 v_1(0) + A_2 v_2 \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

kus

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_0^{(2)}(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{5}{6} \left(\xi^2 - \sqrt{\frac{3}{5}} \xi \right) d\xi = \frac{5}{9} = 0.5555... \\ A_1 &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^{(2)}(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} -\frac{5}{3} \left(\xi^2 - \frac{3}{5} \right) d\xi = \frac{8}{9} = 0.8888... \\ A_2 &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_2^{(2)}(\xi) d\xi = \int_{-1}^{+1} \frac{5}{6} \left(\xi^2 + \sqrt{\frac{3}{5}} \xi \right) d\xi = \frac{5}{9} = 0.5555... \\ A_0 + A_1 + A_2 &= \frac{5}{9} + \frac{8}{9} + \frac{5}{9} = 2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

5.3.1 Gaussi valemid tasapinnal

Funktsiooni $v(\xi, \eta)$ integraal

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} v(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \int_{-1}^{+1} \left[\int_{-1}^{+1} v(\xi, \eta) d\xi \right] d\eta = \\ &= \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{i=1}^N A_i v(\xi_i, \eta) \right] d\eta = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{i=1}^N g(\eta) \right] d\eta = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N A_i A_j g(\eta_j) = \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N A_i A_j v(\xi_i, \eta_j) \end{aligned} \quad (5.24)$$

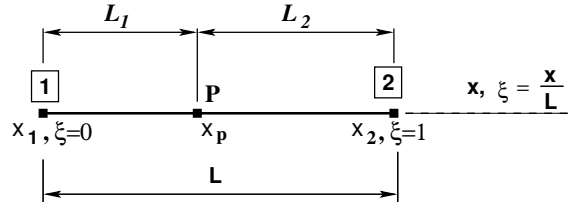
siin

$v(\xi_i, \eta_j)$ – funktsiooni väärtused Gaussi sõlmedes,

A_i ja A_j – kordajad (kaalud) Gaussi sõlmedes vastavalt ξ ning η suunas.

5.4 Valemid $\mathcal{L}_i$ -koordinaatides

Kolmnurga pindalakoordinaatidele ja ruumalakoordinaatidele lisame veel joone $\mathcal{L}_i$ -koordinaadid (joonis 5.6).



Joonis 5.6. L-koordinaat

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 &= 1 \\ x_p &= \mathcal{L}_1 x_1 + \mathcal{L}_2 x_2\end{aligned}\tag{5.25}$$

ehk matrikskujul

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix}\tag{5.26}$$

Seose (5.26) pöördseos on

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_p \end{bmatrix}\tag{5.27}$$

$\mathcal{L}_i$ -koordinaadid on üksteisest sõltuvad

$$\mathcal{L}_2 = 1 - \mathcal{L}_1, \quad dx = L d\xi\tag{5.28}$$

Tähistame $\mathcal{L}_i$ -koordinaadi astme m järgmiselt $\mathcal{L}_i^m$.

Integraal $\mathcal{L}_i$ -koordinaatide korrutisest

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^m \mathcal{L}_2^n dx &= \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^m (1 - \mathcal{L}_1^n) L d\xi = \\ L \int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^m (1 - \mathcal{L}_1^n) d\xi &= L \frac{\Gamma(m+1) \Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}\end{aligned}\tag{5.29}$$

kus

$$\Gamma(m+1) = m!, \quad \Gamma(m+n+2) = (m+n+1)!, \quad 0! = 1\tag{5.30}$$

Kirjutame avaldise (5.29) järgmisel kujul:

$$\int_{-1}^{+1} \mathcal{L}_1^m \mathcal{L}_2^n dx = \frac{L m! n!}{(m+n+1)!}\tag{5.31}$$

Kolmnurga pindalakoordinaadid

Integraal korrutisest

$$\int_A (\mathcal{L}_1)^k (\mathcal{L}_2)^m (\mathcal{L}_3)^n dA = \frac{2A k! m! n!}{(k+m+n+2)!}\tag{5.32}$$

siin on A kolmnurga pindala. Kuna $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 = 1$, siis

$$\int_A (\mathcal{L}_1)^i (\mathcal{L}_2)^j dA = 2A \frac{i!j!}{(i+j+2)!} \quad (5.33)$$

Ruumalakoordinaadid

Integraal korrutisest

$$\int_V (\mathcal{L}_1)^k (\mathcal{L}_1)^l (\mathcal{L}_2)^m (\mathcal{L}_3)^n dV = \frac{6V k!l!m!n!}{(k+l+m+n+3)!} \quad (5.34)$$

siin on V tetraeedri ruumala. Kuna $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 = 1$, siis

$$\int_V (\mathcal{L}_1)^i (\mathcal{L}_2)^j (\mathcal{L}_3)^k dV = 6V \frac{i!j!k!}{(i+j+k+3)!} \quad (5.35)$$

5.5 Gaussi-Radau skeem

Kolmnurgas kasutatakse Gaussi sõlmede asukohtade määramiseks ja ka rajaelementide meetodis singulaarsete integraalide arvutamiseks Gaussi-Radau skeemi.

Tähistame koordinaadid x_1, x_2, x_3 (x, y, z) (joonis 5.7). Vaatleme bilineaarset teisendust

$$x_i = \mathcal{R}_1^{(2)} x_i^{(1)} + \mathcal{R}_2^{(2)} x_i^{(2)} + \mathcal{R}_3^{(2)} x_i^{(3)} \quad , \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5.36)$$

kus

$$\mathcal{R}_1^{(2)} = (1 - \varrho_1), \quad \mathcal{R}_2^{(2)} = (1 - \varrho_2), \quad \mathcal{R}_3^{(2)} = \varrho_1 \varrho_2 \quad (5.37)$$

Järgnevalt vaatleme punktide P_i teisendamist punktideks P_i^*

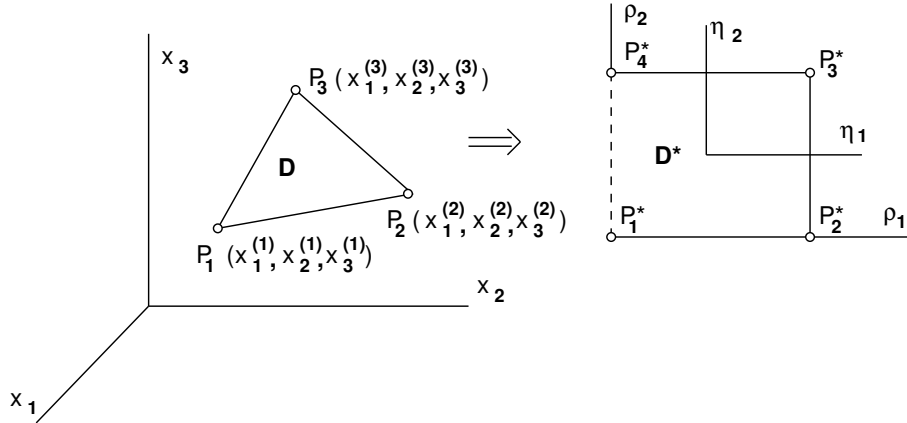
$$\begin{aligned} P_1 \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)} \right) & , & P_1^* (\varrho_1 = 0, \varrho_2 = 0) \\ P_2 \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)} \right) & , & P_2^* (\varrho_1 = 1, \varrho_2 = 0) \\ P_3 \left(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)} \right) & , & P_3^* (\varrho_1 = 1, \varrho_2 = 1) \\ & & P_4^* (\varrho_1 = 0, \varrho_2 = 1) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Punkt P_1 teisendub lõiguks $\overline{P_4^* P_1^*}$ ning lõigud vastavateks lõikudeks

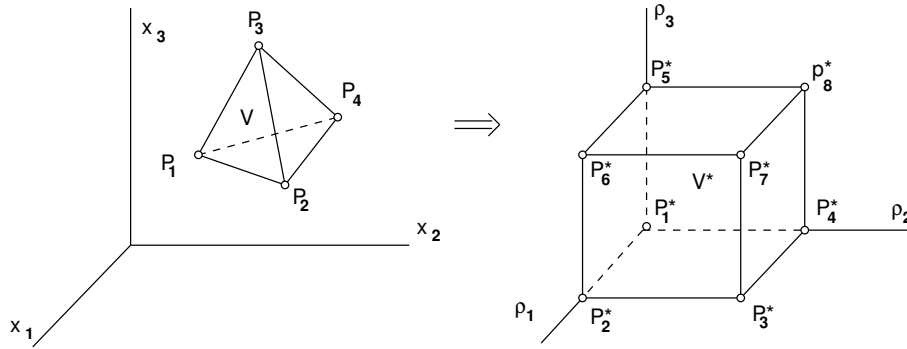
$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_1 P_2} & \implies \frac{\overline{P_4^* P_1^*}}{\overline{P_1^* P_2^*}} \\ \frac{P_2 P_3}{P_3 P_1} & \implies \frac{\overline{P_2^* P_3^*}}{\overline{P_3^* P_4^*}} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Koordinaatide alguspunkti saab viia elemendi keskele teisendusega

$$\varrho_i = \frac{1}{2} (\eta_i + 1), \quad (i = 1, 2) \quad (5.40)$$



Joonis 5.7. Kolmnurga teisendus



Joonis 5.8. Tetraeedri teisendus

Tetraeedri (joonis 5.8) teisendus risttahukaks toimub järgmise avaldisega:

$$x_i = \mathcal{R}_1^{(3)} x_i^{(1)} + \mathcal{R}_2^{(3)} x_i^{(2)} + \mathcal{R}_3^{(3)} x_i^{(3)} + \mathcal{R}_4^{(3)} x_i^{(4)} \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (5.41)$$

kus

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1^{(3)} &= (1 - \varrho_1), & \mathcal{R}_2^{(3)} &= \varrho_1 (1 - \varrho_2) \\ \mathcal{R}_3^{(3)} &= \varrho_1 \varrho_2 (1 - \varrho_3), & \mathcal{R}_4^{(3)} &= \varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 \end{aligned} \quad (5.42)$$

Punkt P_1 ja lõik $\overline{P_1 P_2}$ ning küljed teisenduvad vastavalt

$$\begin{aligned} P_1 &\Rightarrow P_1^* P_4^* P_8^* P_5^* \\ \overline{P_1 P_2} &\Rightarrow P_1^* P_5^* P_6^* P_2^* \\ P_1 P_2 P_3 &\Rightarrow P_1^* P_2^* P_3^* P_4^* \\ P_4 P_1 P_2 &\Rightarrow P_5^* P_6^* P_7^* P_8^* \\ P_3 P_4 P_1 &\Rightarrow P_5^* P_6^* P_7^* P_8^* \\ P_2 P_3 P_4 &\Rightarrow P_5^* P_6^* P_7^* P_8^* \end{aligned} \quad (5.43)$$

Integreerimine pinnal

Vaatleme muutujate teisendust integraalis

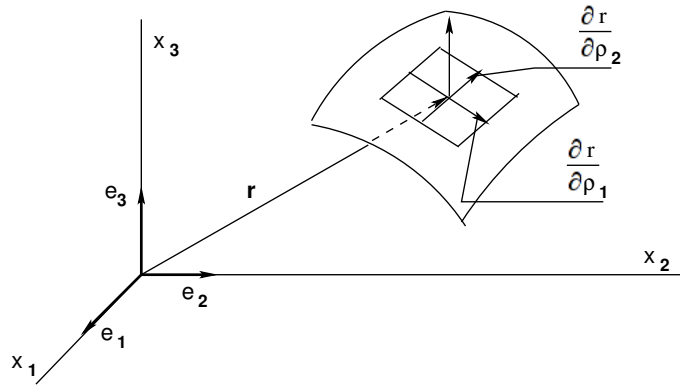
$$\int_A (\dots) dA = \int_{A^*} (\dots) dA^* \quad (5.44)$$

Kirjeldame punkti asukohta raadiusvektoriga $\vec{r}$ (joonis 5.9)

$$\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \quad (5.45)$$

Pinnal on koordinaatideks Radau parameetrid ϱ_1 ja ϱ_2 . Võttes tuletised raadiusvektorist $\vec{r}$, saame pinna puutuja vektorid $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho_1}$ ja $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho_2}$, mille projektsioonid koordinaattelgedele on

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho_1} &= \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_1} \vec{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_1} \vec{e}_3 \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho_2} &= \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_2} \vec{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_2} \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (5.46)$$



Joonis 5.9. Integreerimine pinnal

Puutujate vektorkorrutis

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho_1} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varrho_2} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_2} \end{vmatrix} \vec{e}_1 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_2} \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_2} \end{vmatrix} \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (5.47)$$

Pindala element $d\vec{A}$ on

$$d\vec{A} = \vec{n} dA \quad (5.48)$$

kus

$$dA = \sqrt{\vec{A} \vec{A}} = J_A d\varrho_1 d\varrho_2 \quad (5.49)$$

Jakobiaan J_A on järgmine avaldis:

$$J_A = \sqrt{\left(\frac{\partial x_2}{\partial \varrho_1} \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_2} \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \varrho_1} \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_2} \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_2} \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_1}\right)^2} \quad (5.50)$$

Koordinaatide x_i tuletised parameetrite ϱ_i järgi

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_1} &= (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \varrho_2 (x_i^{(3)} - x_i^{(2)}) = x_i^{(21)} + \varrho_2 x_i^{(32)} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_2} &= \varrho_1 (x_i^{(3)} - x_i^{(2)}) = \varrho_1 x_i^{(32)} \\ (i &= 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Jakobiaan J_A on

$$J_A = 2\varrho_1 A_\Delta \quad (5.52)$$

kus A_Δ on kolmnurga pindala.

Üleminek koordinaatidele η_i

$$J_A = \frac{1}{2}(\eta_1 + 1) \quad , \quad \varrho_2 = \frac{1}{2}(\eta_2 + 1) \quad (5.53)$$

Pindala elemendiks dA saame

$$dA = J_A d\varrho_1 d\varrho_2 = J_A J_g d\eta_1 d\eta_2 \quad (5.54)$$

kus

$$J_g = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial \varrho_1}{\partial \eta_2} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial \eta_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \quad (5.55)$$

Integreerimine ruumis

Vaatleme integraalis (5.56) muutujate teisendust

$$\int_V (\dots) dV = \int_{V^*} (\dots) dV^* \quad (5.56)$$

Elementaarruumala dV avaldub jakobiaani J_v kaudu järgmiselt:

$$dV = J_v d\varrho_1 d\varrho_2 d\varrho_3 \quad (5.57)$$

kus jakobiaan J_v kirjutatakse järgmise determinandina:

$$J_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \varrho_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \varrho_3} \end{vmatrix} \quad (5.58)$$

Koordinaatide x_i tuletised parameetrite ϱ_i järgi

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_1} &= (x_i^{(2)} - x_i^{(1)}) + \varrho_2 (x_i^{(3)} - x_i^{(2)}) + \varrho_2 \varrho_3 (x_i^{(4)} - x_i^{(3)}) = \\
 &= x_i^{(21)} + \varrho_2 x_i^{(32)} + \varrho_2 \varrho_3 x_i^{(43)} \\
 \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_2} &= \varrho_1 (x_i^{(3)} - x_i^{(2)}) + \varrho_1 \varrho_2 (x_i^{(4)} - x_i^{(3)}) = \\
 &= \varrho_1 x_i^{(32)} + \varrho_1 \varrho_2 x_i^{(43)} \\
 \frac{\partial x_i}{\partial \varrho_3} &= \varrho_1 \varrho_2 (x_i^{(4)} - x_i^{(3)}) = \\
 &= \varrho_1 \varrho_2 x_i^{(43)} \\
 &\quad (i = 1, 2, 3)
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

Jakobiaani J_v saame nüüd avaldada järgmiselt:

$$J_v = 6\varrho_1^2 \varrho_2 V \tag{5.60}$$

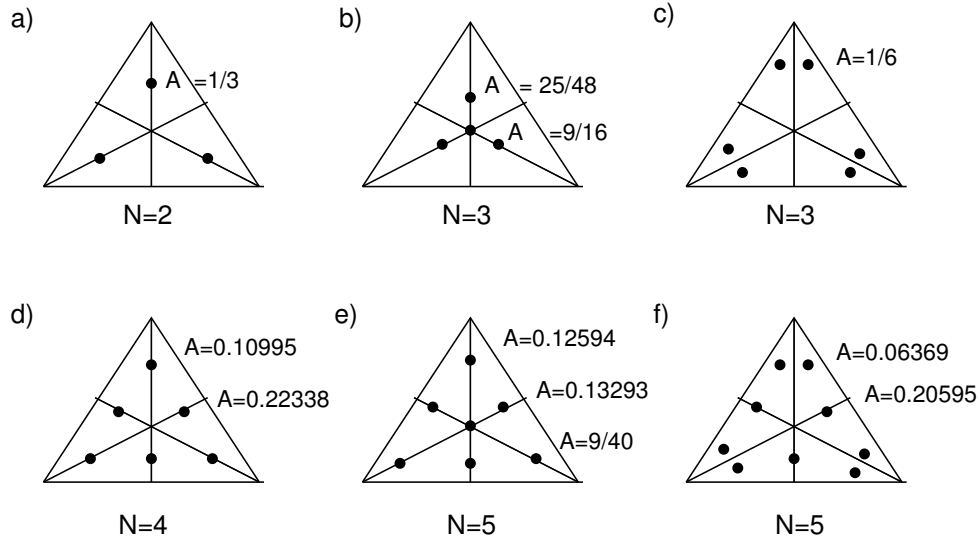
kus V on tetraeedri ruumala.

5.6 Kolmnurkse elemendi kaalud

Kolmnurkse elemendi integraali arvutame avaldisega

$$\int_A v(x, y) dA = A_i v_i(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3) \tag{5.61}$$

Joonisel 5.10 on näidatud kolmnurkse elemendi sõlmed. Tabelis anname integreerimisõlmede koordinaadid ja kaalud.



Joonis 5.10. Kolmnurkse elemendi kaalud

Tabel 5.2. Integreerimissõlmede koordinaadid ja kaalud

Skeem	Kaal A_i	Sõlmede arv	Koordinaadid					
1	2	3	4					
a)	$\frac{1}{3}$	3	$\mathcal{L}_1 = \frac{2}{3}, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = \frac{1}{6}$					
b)	$-\frac{9}{16}$	1	$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = \frac{1}{3}$					
	$\frac{25}{48}$	3	$\mathcal{L}_1 = \frac{3}{5}, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = \frac{1}{5}$					
c)	$\frac{1}{6}$	6	$\mathcal{L}_1 = 0.659$	027	622	374	0922	
			$\mathcal{L}_2 = 0.109$	039	009	072	9772	
			$\mathcal{L}_3 = 0.231$	933	368	553	0306	

Integreerimissõlmede koordinaadid ja kaalud														
Skeem	Kaal A_i			Sõlmede arv		Koordinaadid								
1	2			3		4								
d)	0.109	951	743	655	3219	3	$\mathcal{L}_1 = 0.816$			847	572	980	4585	
							$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = 0.091$			576	213	509	7707	
e)	0.223	381	589	678	0115	3	$\mathcal{L}_1 = 0.108$			103	018	168	0702	
							$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = 0.445$			984	490	915	9649	
						1	$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = \frac{1}{3}$							
	0.125	939	180	544	8272	3	$\mathcal{L}_1 = 0.797$			426	985	353	0873	
							$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = 0.101$			286	507	323	4563	
f)	0.132	394	152	788	5062	3	$\mathcal{L}_1 = 0.059$			715	871	789	7698	
							$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = 0.470$			142	064	105	1151	
	0.125	939	180	544	8272	3	$\mathcal{L}_1 = 0.205$			950	504	760	886	
							$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_3 = 0.437$			525	248	383	3839	
	0.063	961	414	286	2233	6	$\mathcal{L}_1 = 0.797$			112	651	860	0708	
							$\mathcal{L}_2 = 0.165$			409	927	389	8414	
							$\mathcal{L}_3 = 0.037$			477	420	750	0878	

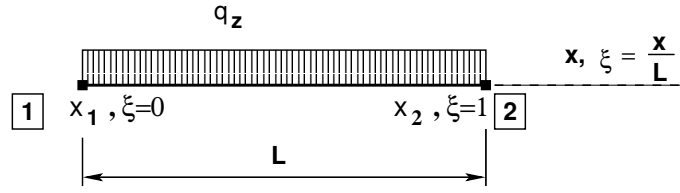
5.7 Näiteid numbrilisest integreerimisest

Näide 5.1 Taandada joonisel 5.11 näidatud tala elemendile mõjuv ühtlaselt jaotatud lauskoormus sõlmedesse.

Võtame kasutusele mõõduta koordinaadi ξ ($d\xi = Ld\xi$). Virtuaalsiirete printsiip tala elemendi jaoks

$$\int_0^L M_y \delta \psi_y dx = [M_y \delta \varphi_y + Q_z \delta w] \Big|_0^L + \int_0^L q(x) \delta w dx \quad (5.62)$$

Avaldise (5.62) viimane liige väljendab välisjõu võimalikku tööd. Lähendame siirdeid Hermi-



Joonis 5.11. Koormuse taandamine sõlmedesse

te'i interpolatsiooniga

$$\int_0^L q(x) \delta w dx = \int_0^L q (N_1 \delta w_1 + N_2 \delta w'_1 + N_3 \delta w_2 + N_4 \delta w'_2) dx \quad (5.63)$$

Kujufunktsioonide N_i integraalid

$$\begin{aligned} \int_0^L N_1(x) dx &= \int_0^1 (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) L d\xi = \frac{L}{2} \\ \int_0^L N_2(x) dx &= \int_0^1 L\xi (1 - \xi)^2 L d\xi = \frac{L^2}{12} \\ \int_0^L N_3(x) dx &= \int_0^1 (3\xi^2 - 2\xi^3) L d\xi = \frac{L}{2} \\ \int_0^L N_4(x) dx &= \int_0^1 L (\xi^3 - \xi^2) L d\xi = -\frac{L^2}{12} \end{aligned} \quad (5.64)$$

Saadud avldised (5.64) ühtivad varem saadutega. Esitame välisjõudude võimaliku töö maatrikskujul

$$\int_0^L q(x) \delta w dx = \begin{bmatrix} \delta w_1 & \delta w'_1 & \delta w_2 & \delta w'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Rajajõudude võimalik töö maatrikskujul

$$[M_y \delta \varphi_y + Q_z \delta w] \Big|_0^L = \begin{bmatrix} \delta w_1 & \delta w'_1 & \delta w_2 & \delta w'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{z1} \\ M_{y1} \\ Q_{z2} \\ M_{y2} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

siin $\varphi_y = -w'_i$ ja $M_y = -EI w''_i$.

Avaldises (5.66) on arvestatud II märgikokkulepet. Rajatingimused erinevate märgikokkulepete puhul:

- I märgikokkulepe

$$[M_y \delta \varphi_y + Q_z \delta w] \Big|_0^L = M_{y2} \delta \varphi_{y2} - M_{y1} \delta \varphi_{y1} + Q_{z2} \delta w_2 - Q_{z1} \delta w_1 \quad (5.67)$$

- II märgikokkulepe

$$[M_y \delta \varphi_y + Q_z \delta w] \Big|_0^L = M_{y2} \delta \varphi_{y2} + M_{y1} \delta \varphi_{y1} + Q_{z2} \delta w_2 + Q_{z1} \delta w_1 \quad (5.68)$$

Sisejõudude võimaliku töö avaldis on

$$\int_0^L M_y \delta \psi_y dx = \int_0^L w'' EI \delta w'' dx \quad (5.69)$$

siin $\psi_y = -w''$. Siirde w esitame kujufunktsioonide abil

$$w(x) = N_1 w_1 + N_2 w'_1 + N_3 w_2 + N_4 w'_2 \quad (5.70)$$

Siirde teine tuletis w'' ja selle variatsioon $\delta w''$

$$w'' = \frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} w_1 + \frac{d^2 N_2(x)}{dx^2} w'_1 + \frac{d^2 N_3(x)}{dx^2} w_2 + \frac{d^2 N_4(x)}{dx^2} w'_2 \quad (5.71)$$

$$\delta w'' = \frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} \delta w_1 + \frac{d^2 N_2(x)}{dx^2} \delta w'_1 + \frac{d^2 N_3(x)}{dx^2} \delta w_2 + \frac{d^2 N_4(x)}{dx^2} \delta w'_2 \quad (5.72)$$

Lähme üle mõõduta koordinaatidele $\xi = \frac{x}{l}$, kus tuletised ξ järgi on

$$\frac{d \dots}{dx} = \frac{d}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l} \frac{d \dots}{d\xi}, \quad \frac{d^2 \dots}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 \dots}{d\xi^2} \quad (5.73)$$

Võtame Hermite'i kujufunktsioonidest (5.64) tuletised, saame

$$w'' = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} (-6 + 12\xi) & l(-4 + 6\xi) & (6 - 12\xi) & l(-2 + 6\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

Võimalikud teised tuletised $\delta w''$ esitame järgmisel kujul:

$$w'' = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} w_1 & w'_1 & w_2 & w'_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-6 + 12\xi) \\ l(-4 + 6\xi) \\ (6 - 12\xi) \\ l(-2 + 6\xi) \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

Avaldise (5.69) integreerimisel kasutame Simpsoni valemit

$$\begin{aligned} \int_0^l w'' EI \delta w'' dx &= \frac{l}{6} \left(w'' EI \delta w'' \Big|_{\xi=0} + 4 w'' EI \delta w'' \Big|_{\xi=0.5} + w'' EI \delta w'' \Big|_{\xi=1} \right) = \\ &= \frac{l}{6} \frac{1}{l^4} \begin{bmatrix} w_1 & w'_1 & w_2 & w'_2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -4l \\ 6 \\ -2l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -4l & 6 & -2l \end{bmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ -l \\ 0 \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -l & 0 & l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2l \\ -6 \\ 4l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2l & -6 & 4l \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \end{bmatrix} \quad (5.76) \end{aligned}$$

Sisejõudude võimaliku töö avaldise (5.76) esitame järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} \int_0^l M_y \delta \psi_y dx &= \int_0^l \delta w'' EI w'' dx = \\ &= \begin{bmatrix} w_1 & w'_1 & w_2 & w'_2 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.77)$$

Avaldisest (5.77) saab jäikusmaatriksi K

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

Sisejõudude võimaliku töö avaldise esitame jäikusmaatriksi K abil

$$\int_0^l M_y \delta \psi_y dx = [\delta d^T] [K] [d] \quad (5.79)$$

Virtuaalsiirete printsiip varda elemendi jaoks on

$$[\delta d^T] [K] [d] = [\delta d^T] [F] + [\delta d^T] [F_q] \quad (5.80)$$

kus sõlmpunktis on sisejõud F ja siirded d ning elemendile mõjuv koormus sõlmpunktis F_q

$$[F_q] = \int_0^l q(x) [N] dx \quad (5.81)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} Q_{z1} \\ M_{y1} \\ Q_{z2} \\ M_{y2} \end{bmatrix}, \quad [d] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w'_1 \\ w_2 \\ w'_2 \end{bmatrix}, \quad [N] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

Jäikusmaatriks K

$$[K] = \int_0^l [B^T] EI [B] dx \quad (5.83)$$

siin

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} & \frac{d^2 N_2(x)}{dx^2} & \frac{d^2 N_3(x)}{dx^2} & \frac{d^2 N_4(x)}{dx^2} \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

Sõlmpunktide siirete kaudu arvutame paindemomendi M_y

$$M_y = EI \psi_y = EI [B] [d] = [S] [d] \quad (5.85)$$

kus

$$[S] = [D] [B] \quad (5.86)$$

$$[D] = EI \quad (5.87)$$

Varda elemendi tasakaaluvõrrandid

$$[K] [d] = [F] + [F_q] \quad (5.88)$$

Peatükk 6

Isoparameetriline element

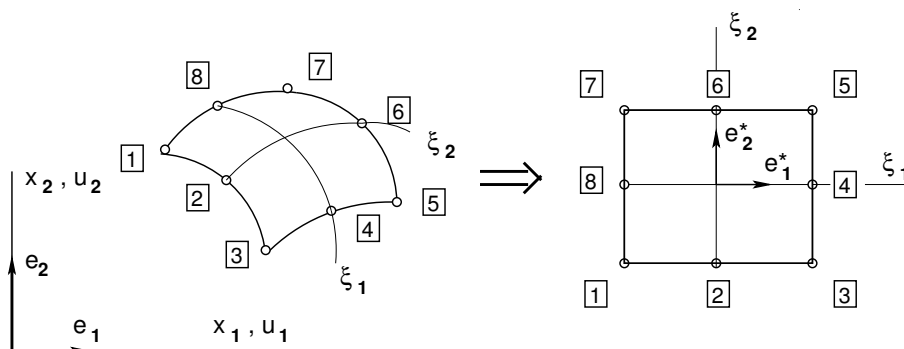
6.1 Koordinaatide teisendus

Vaatleme elementi, mille sõlmpunktide $[i]$ koordinaadid on x_1^i, x_2^i ja siirded u_1^i, u_2^i (joonis 6.1)

$$\begin{aligned} x_i &= N_1 x_1^1 + N_2 x_1^2 + \dots + N_8 x_1^8 \\ x_i &= N_k x_1^k, \quad (i = 1, 2; k = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} u_i &= N_1^* u_1^1 + N_2^* u_1^2 + \dots + N_8^* u_1^8 \\ u_i &= N_l^* u_1^l, \quad (i = 1, 2; l = 1, 2, \dots, 8) \end{aligned} \quad (6.2)$$

Sõltuvalt sõlmpunktide arvust k koordinaatide interpoleerimisel ja sõlmpunktide arvust



Joonis 6.1. Isoparameetriline teisendus

l siirete interpoleerimisel liigitame elemendid järgmiselt:

- $l = k$ – isoparameetrilised
- $l > k$ – subparameetrilised
- $l < k$ – superparameetrilised

Kui tähistame koordinaadid $x_1 \equiv x$ ja $x_2 \equiv y$ ning $\xi_1 \equiv \xi$, $\xi_2 \equiv \eta$, siis

$$\begin{aligned} x_1 &= x = x(\xi, \eta) \\ x_2 &= y = y(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Koordinaatide diferentsiaalid dx ja dy sõltuvalt ξ, η on

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 dx &= \vec{e}_1^* \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \vec{e}_2^* \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta \\ \vec{e}_2 dy &= \vec{e}_1^* \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \vec{e}_2^* \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{aligned} \quad (6.4)$$

Elementaarpindala teisendub järgmiselt:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 dx \times \vec{e}_2 dy &= \vec{e}_3 dx dy = \begin{vmatrix} \vec{e}_1^* & \vec{e}_2^* & \vec{e}_3^* \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{e}_3^* \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = \vec{e}_3^* |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6.5)$$

kus ($|J| \neq 0$)

$$|J| = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (6.6)$$

ning

$$dA = |J| d\xi d\eta \quad (6.7)$$

Kujufunktsioonide N_i tuletised koordinaatide ξ, η järgi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = |J| \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Pöördseosed

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = |J^{-1}| \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

siin

$$|J^{-1}| = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

6.2 Konstantse tuletise kriteerium

Isoparameetrilised elemendid peavad rahuldama järgmist konstantse tuletise kriteeriumi (6.14). Olgu siirded kirjeldatud järgmise polünoomiga

$$v(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \dots = N_i^* v_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6.11)$$

ning koordinaadid polünoomiga

$$\begin{aligned} x &= \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots \\ y &= \alpha_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots \end{aligned} \quad (6.12)$$

Asetades avaldise (6.12) avaldisse (6.11), saame

$$\begin{aligned} N_i^* v_i &= (\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \dots) N_1^* + \\ &+ (\alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 + \dots) N_2^* + \\ &+ \dots + \\ &+ (\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i + \dots) N_i^* + \\ &+ \dots + \\ &+ (\alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 y_n + \dots) N_n^* \end{aligned} \quad (6.13)$$

Võrreldes saadud avaldist esialgse avaldisega (6.11), saame järgmise konstantse tuletise kriteeriumi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_0 N_i^* &= \alpha_0 & \longrightarrow & \sum_{i=1}^n N_i^* = 1 \\ \alpha_1 x_i N_i^* &= \alpha_1 x & \longrightarrow & N_i^* x_i = x \\ \alpha_2 y_i N_i^* &= \alpha_2 y & \longrightarrow & N_i^* y_i = y \\ & & & (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (6.14)$$

6.3 Elementide kujutised ja originaalid

Toome näiteks isoparameetriliste elementide kujutisi ja originaale.

Nelinurkse elemendi kujutis ja originaal

Koordinaatide teisendus

$$x_i = N_1(\xi_1, \xi_2) x_i^1 + N_2(\xi_1, \xi_2) x_i^2 + N_3(\xi_1, \xi_2) x_i^3 + N_4(\xi_1, \xi_2) x_i^4 \quad (6.15)$$

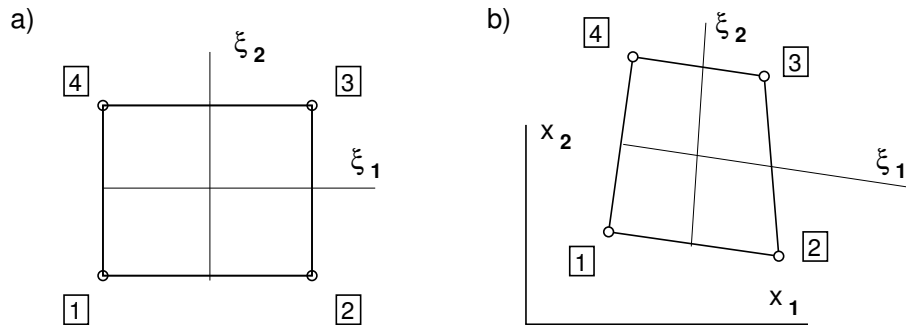
Koordinaadid on joonisel 6.2.

12 sõlmpunktiga elemendi kujutis ja originaal

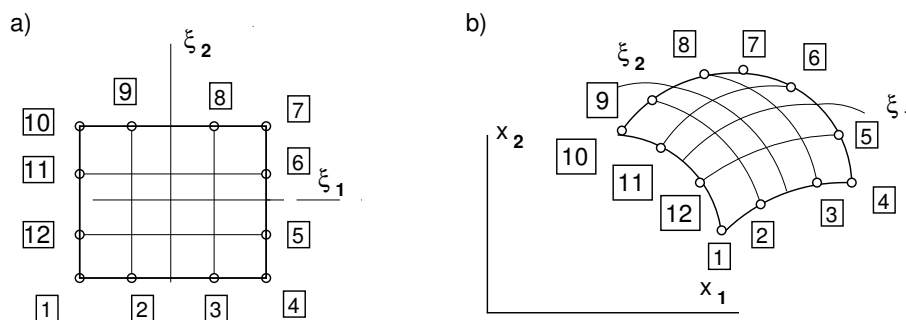
Koordinaatide teisendus

$$x_i = N_k(\xi_1, \xi_2) x_i^k, \quad (k = 1, 2, \dots, 12) \quad (6.16)$$

Koordinaadid on joonisel 6.3.



Joonis 6.2. Nelinurkse elemendi kujutis ja originaal



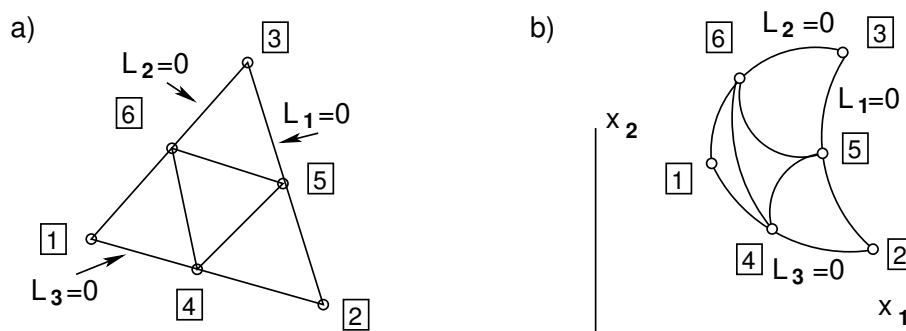
Joonis 6.3. 12 sõlmpunktiga elemendi kujutis ja originaal

Kolmnurkse elemendi kujutis ja originaal

Koordinaatide teisendus

$$x_i = N_k(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3) x_i^k, \quad (k = 1, 2, \dots, 6) \quad (6.17)$$

Koordinaadid on joonisel 6.4.

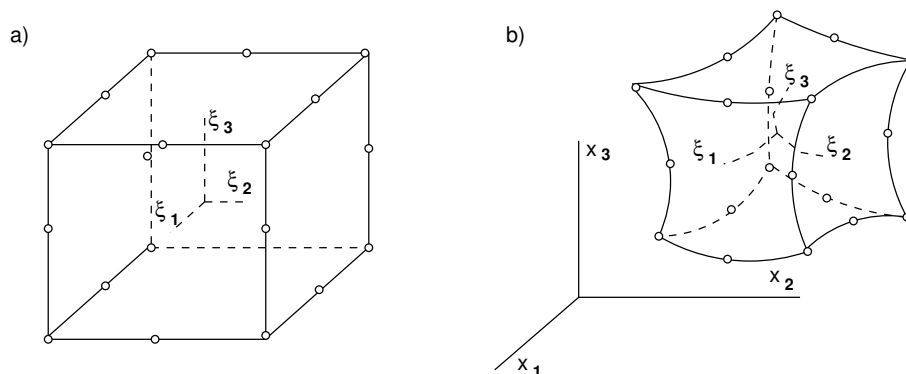


Joonis 6.4. Kolmnurkse elemendi kujutis ja originaal

Risttahukalise elemendi kujutis ja originaal

Koordinaatide teisendus

$$x_i = N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_i^k, \quad (k = 1, 2, \dots, 20) \quad (6.18)$$



Joonis 6.5. Risttahukalise elemendi kujutis ja originaal

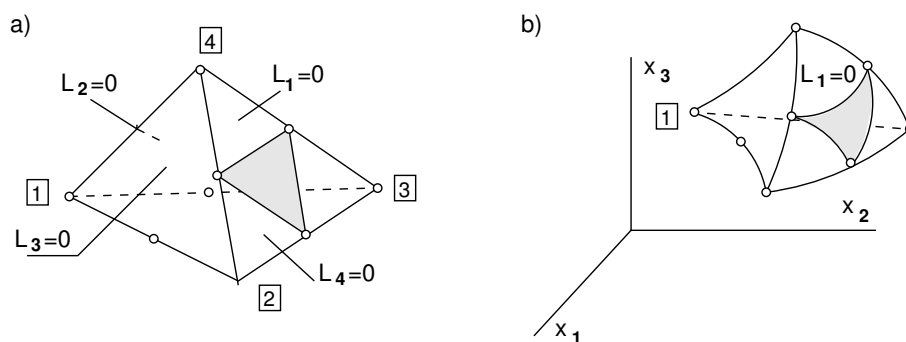
Koordinaadid on joonisel 6.5.

Tetraeedrilise elemendi kujutis ja originaal

Koordinaatide teisendus

$$x_i = N_k(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4) x_i^k, \quad (k = 1, 2, \dots, 10) \quad (6.19)$$

Koordinaadid on joonisel 6.6.



Joonis 6.6. Tetraeedrilise elemendi kujutis ja originaal

Peatükk 7

Elastusteooria tasandülesanne

7.1 Siirded ja deformatsioonid

Olgu siirded tasapinnal $x - y$ $u(x, y)$ ja $v(x, y)$. Sõlmpunkti $[i]$ siirdeid d_i ja elemendi sõlmpunktide siirdeid d kirjeldame vektoritega

$$[d_i] = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}, \quad [d] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Siirdeid $u(x, y)$, $v(x, y)$ elemendis interpoleerime kujufunktsioonide N_i abil järgmiselt:

$$[f] = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = [\mathbf{N}] [d] \quad (7.2)$$

kus

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \vdots & N_2 & 0 & \vdots & \dots & \vdots & N_i & 0 \\ 0 & N_1 & \vdots & 0 & N_2 & \vdots & \dots & \vdots & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

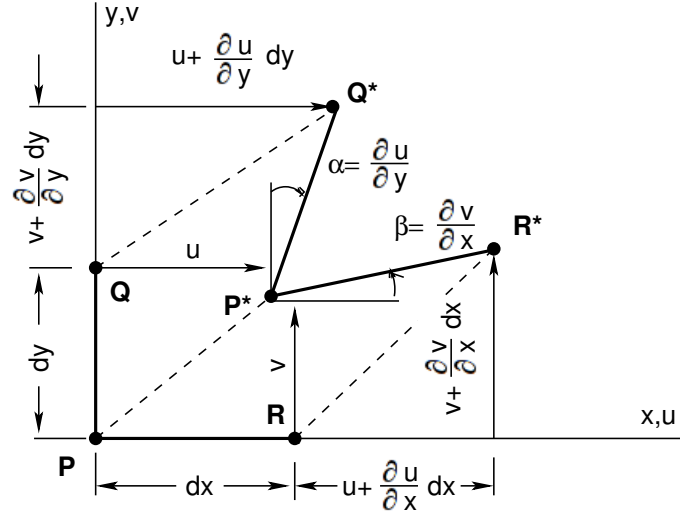
Deformatsioone kirjeldame joondeformatsioonide ϵ_x , ϵ_y ja nihkedeformatsioonide $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ (joonis 7.1) abil

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Deformatsioonid kujufunktsioonide abil

$$[\epsilon] = [\mathbf{B}] [d] \quad (7.5)$$

kus



Joonis 7.1. Siirded ja deformatsioonid

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \vdots & \dots & \vdots & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \vdots & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \vdots & \dots & \vdots & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \vdots & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \vdots & \dots & \vdots & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

7.2 Deformatsiooni pidevuse tingimus

Siirete diferentsiaalid du , dv

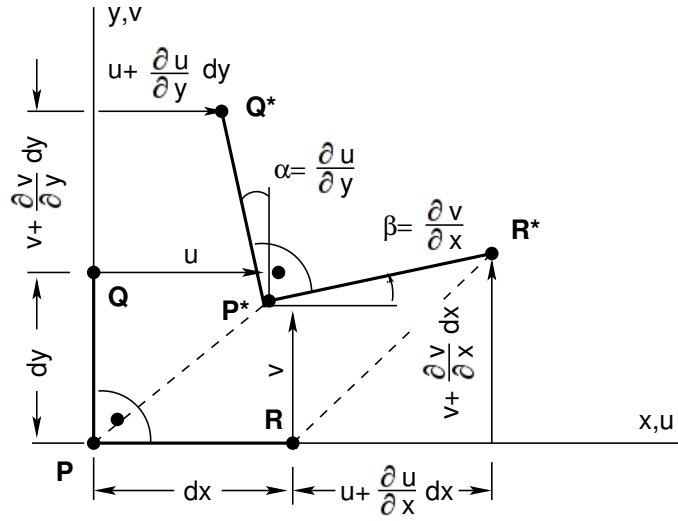
$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (7.7)$$

Liidame ja lahutame $\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x}$ esimesele võrrandile (7.7) ning $\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y}$ teisele võrrandile (7.7), saame

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dy \\ dv &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (7.8)$$

Kasutame tähistusi ϵ_{xy} , $\omega_z = \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ (joonis 7.2)

$$\begin{aligned} \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$



Joonis 7.2. Jäiga keha pööre

integreerime avaldist (7.8) punktist P_0 punktini P_1

$$\begin{aligned} \int_{P_0}^{P_1} du &= \int_{P_0}^{P_1} \epsilon_x dx + [\epsilon_{xy} - \omega_z] dy \\ \int_{P_0}^{P_1} dv &= \int_{P_0}^{P_1} [\epsilon_{xy} + \omega_z] dx + \epsilon_y dy \end{aligned} \quad (7.10)$$

Täisdiferentsiaal, kui ta ei sõltu integreerimistee kujust

$$\int_{P_0}^{P_1} P dx + Q dy \quad (7.11)$$

peab rahuldama järgmist tingimust:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (7.12)$$

Rakendame tingimust (7.12) võrranditele (7.10) ning diferentseerime esimest võrrandit $\frac{\partial}{\partial y}$ -iga ja teist võrrandit $\frac{\partial}{\partial x}$ -iga

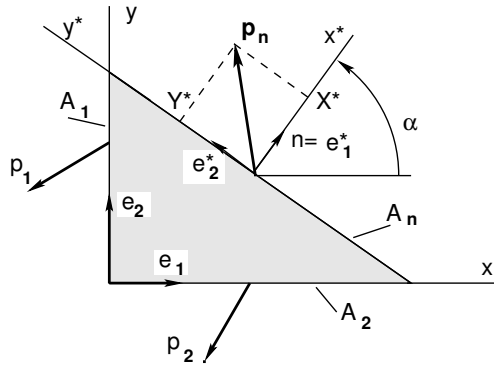
$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= \frac{\partial (\epsilon_{xy} - \omega_z)}{\partial x} \quad , \quad \left| \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} &= \frac{\partial (\epsilon_{xy} + \omega_z)}{\partial y} \quad , \quad \left| \frac{\partial}{\partial x} \right. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Liites võrrandid (7.13), saame *deformatsiooni pidevuse tingimuse*

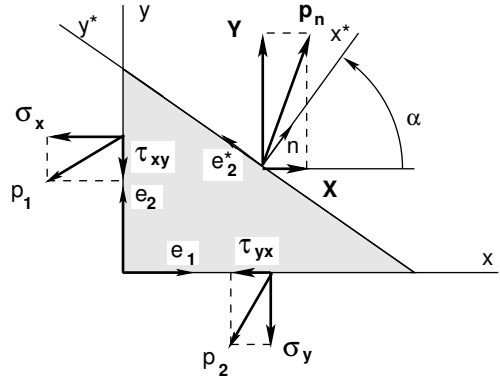
$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad (7.14)$$

7.3 Pinged kaldpinnal

Vaatleme koordinaatide x, y (joonist 7.3) alguses oleva elemendi tasakaalu. Selleks korrutame pingvektori p_i vastava pindalaga A_i



Joonis 7.3. Pingvektorid



Joonis 7.4. Pinged kaldpinnal

$$\vec{p}_n A_n = \vec{p}_1 A_1 + \vec{p}_2 A_2 \quad (7.15)$$

Pindalad A_1, A_2 avaldame pinnanormaali $\vec{n}$ projektsioonide n_1, n_2 x - ja y -telgedele ning kaldpinna A_n kaudu

$$\begin{aligned} A_1 &= A_n \cos(\vec{n}, \vec{e}_1) = A_n n_1 \\ A_2 &= A_n \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) = A_n n_2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

Asetades saadud avaldised (7.16) avaldisse (7.15) ja taandades A_n -iga, saame

$$\vec{p}_n = \vec{p}_1 n_1 + \vec{p}_2 n_2 \quad (7.17)$$

Avaldame $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ ja $\vec{p}_n$ nende projektsioonide kaudu (joonis 7.4)

$$\begin{aligned} \vec{p}_1 &= \sigma_x \vec{e}_1 + \tau_{xy} \vec{e}_2 \\ \vec{p}_2 &= \tau_{yx} \vec{e}_1 + \sigma_y \vec{e}_2 \\ \vec{p}_n &= X \vec{e}_1 + Y \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (7.18)$$

Asetame võrrandisse (7.17) seosed (7.18), saame

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Vektori $\vec{n}$ projektsioonid n_1, n_2 üldkoordinaatides avalduvad projektsioonide n_1^*, n_2^* kohalikes koordinaatides kaudu (3.13)

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^* \\ n_2^* \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

ehk

$$[n] = [T] [n^*] \quad (7.21)$$

siin teisendusmaatriks $[T]$ on

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Pingevektori $\vec{p}_n$ projektsioonid n_1^*, n_2^* kohalikes koordinaatides avalduvad projektsioonide X_1, Y_2 üldkoordinaatides kaudu (3.12)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_1^* \\ Y_2^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \beta \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^* \\ n_2^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.23)$$

ehk

$$\begin{bmatrix} X_1^* \\ Y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^* & \tau_{yx}^* \\ \tau_{xy}^* & \sigma_y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1^* \\ n_2^* \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

kus

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^* & \tau_{yx}^* \\ \tau_{xy}^* & \sigma_y^* \end{bmatrix} = [T^T] \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} [T] \quad (7.25)$$

7.4 Tasakaaluvõrrandid

Vaatleme elemendi (joonis 7.5) tasakaalu. Elemendi kõrgus on h ja laius b . Koostame tasakaaluvõrrandid x - ja y -teljele

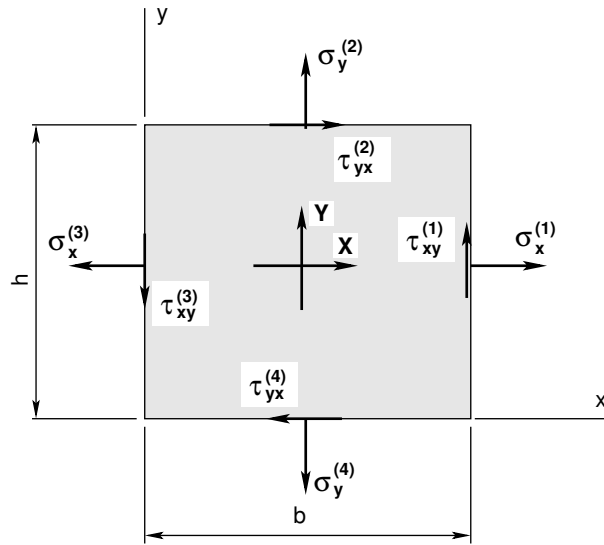
$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} h - \sigma_x^{(3)} h + \tau_{yx}^{(2)} b - \tau_{yx}^{(4)} b + Xbh &= 0 \\ \sigma_y^{(2)} b - \sigma_x^{(4)} b + \tau_{xy}^{(1)} h - \tau_{xy}^{(3)} h + Ybh &= 0 \end{aligned} \quad (7.26)$$

Jagame võrrandid (7.26) pindalaga bh , saame

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x^{(1)} - \sigma_x^{(3)}}{b} + \frac{\tau_{yx}^{(2)} - \tau_{yx}^{(4)}}{h} + X &= 0 \\ \frac{\tau_{xy}^{(1)} - \tau_{xy}^{(3)}}{b} + \frac{\sigma_y^{(2)} - \sigma_x^{(4)}}{h} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (7.27)$$

Piirprotsessis $\lim_{h \rightarrow 0}$ ja $\lim_{b \rightarrow 0}$ saame tasakaaluvõrrandid

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

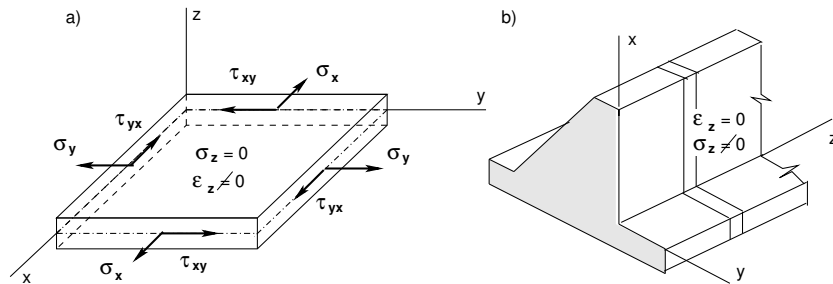


Joonis 7.5. Elemendi tasakaal

7.5 Elastsusseosed. Elastsuskonstandid

Tasandülesanne (joonist 7.6) jaguneb järgmiselt:

- tasandpingus $\sigma_z = 0$, $\epsilon_z \neq 0$
- tasanddeformatsioon $\sigma_z \neq 0$, $\epsilon_z = 0$



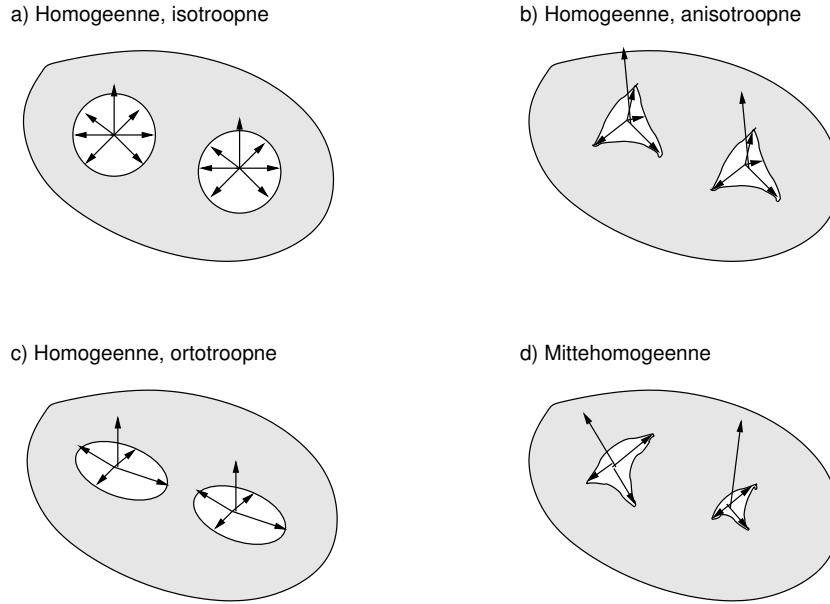
Joonis 7.6. Tasandülesanded

Omaduste poolest (joonis 7.7) on materjalid

- homogeenised
- mittehogeenised

ning omaduste suunast sõltuvalt

- isotroopsed
- anisotroopsed



Joonis 7.7. Materjalide omadused

- ortotroopsed

Edaspidi vaatleme homogeenseid ja isotroopseid materjale, s.t materjali omadused on kõigis punktides ja kõigis suundades ühesugused. Elastsusseosed

$$[\sigma] = [\mathbf{D}] [\epsilon] \quad (7.29)$$

kus pingete vektor $[\sigma]$ ja deformatsioonide vektor $[\epsilon]$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Elastusmaatriks (elastsuskonstantide maatriks) sõltub sellest, kas vaatleme tasandpingust või tasanddeformatsiooni.

Tasandpingus (homogeenne, isotroopne)

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

Elastusmaatriksi võib lahutada kahe kolmnurkse maatriksi korrutiseks (Cholesky lahutus)

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{C}^T] [\mathbf{C}] \quad (7.32)$$

kus

$$[\mathbf{C}] = \sqrt{\frac{E}{1 - \nu^2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

Tasanddeformatsioon (homogeenne, isotroopne)

$$[\mathbf{D}] = \frac{E(1-\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

Elastsusmaatriksi võib lahutada kahe kolmnurkse maatriksi korrutiseks (Cholesky lahutus)

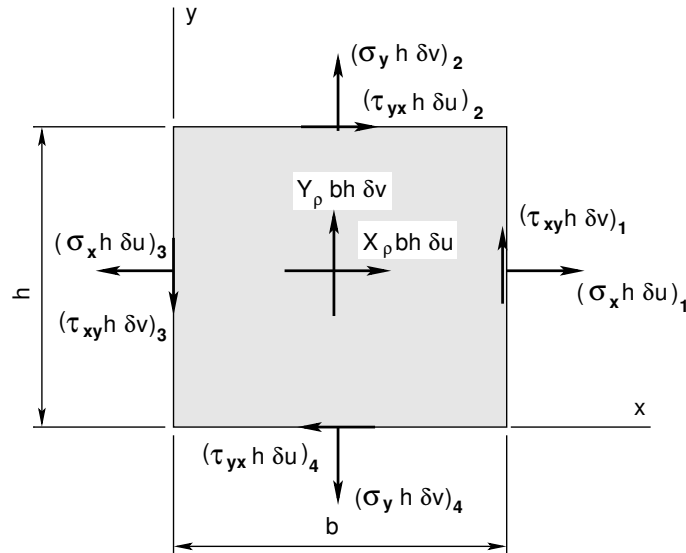
$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{C}^T] [\mathbf{C}] \quad (7.35)$$

kus

$$[\mathbf{C}] = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1-\nu)(1-2\nu)}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

7.6 Deformatsioonienergia

Elemendi deformatsioonienergia avaldise ΔU väljakirjutamiseks vaatleme joonist 7.8.



Joonis 7.8. Elemendi võimalik deformatsioonienergia

$$\begin{aligned} \Delta U = & (\sigma_x h \delta u)_1 - (\sigma_x h \delta u)_3 + (\sigma_y b \delta v)_2 - (\sigma_y b \delta v)_4 + \\ & + (\tau_{yx} b \delta u)_2 - (\tau_{yx} b \delta u)_4 + (\tau_{xy} h \delta v)_1 - (\tau_{xy} h \delta v)_3 + \\ & + X_\rho b h \delta u + Y_\rho b h \delta v \end{aligned} \quad (7.37)$$

Jagame võrrandid (7.37) pindalaga bh , saame

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{bh} = & \frac{(\sigma_x \delta u)_1 - (\sigma_x \delta u)_3}{b} + \frac{(\sigma_y \delta v)_2 - (\sigma_y \delta v)_4}{h} + \\ & + \frac{(\tau_{yx} \delta u)_2 - (\tau_{yx} \delta u)_4}{h} + \frac{(\tau_{xy} \delta v)_1 - (\tau_{xy} \delta v)_3}{b} + \\ & + X_\varrho \delta u + Y_\varrho \delta v \end{aligned} \quad (7.38)$$

Piirprotsessis $\lim_{h \rightarrow 0}$ ja $\lim_{b \rightarrow 0}$ saame võimaliku deformatsioonienergia punktis $\delta \tilde{U}$

$$\begin{aligned} \delta \tilde{U} = & \frac{\partial (\sigma_x \delta u)}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_y \delta v)}{\partial y} + \\ & + \frac{\partial (\tau_{yx} \delta u)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_{xy} \delta v)}{\partial x} + \\ & + X_\varrho \delta u + Y_\varrho \delta v \end{aligned} \quad (7.39)$$

Korrutisest tuletiste võtmisel arvestame järgmisi seoseid:

$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} = \delta \frac{\partial u}{\partial x} = \delta \epsilon_x \quad (7.40)$$

$$\frac{\partial \delta v}{\partial y} = \delta \frac{\partial v}{\partial y} = \delta \epsilon_y \quad (7.41)$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} = \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \delta \gamma_{xy} \quad (7.42)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (7.43)$$

Seoste (7.43) arvestamisel saame

$$\begin{aligned} \delta \tilde{U} = & \sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \\ & + \underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X_\varrho \right)}_{=0, \text{ tasakaaluvõrrandid}} \delta u + \underbrace{\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y_\varrho \right)}_{=0, \text{ tasakaaluvõrrandid}} \delta v \end{aligned} \quad (7.44)$$

Kogu võimaliku deformatsioonienergia saab integreerimisel üle pindala A

$$\delta U = \int_A (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dx dy \quad (7.45)$$

Avaldise (7.45) esitame maatrikskujul

$$\delta U = \int_A \begin{bmatrix} \delta \epsilon_x & \delta \epsilon_y & \delta \gamma_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dx dy \quad (7.46)$$

ehk veel lühemalt

$$\delta U = \int_A [\delta \epsilon] [\sigma] dx dy \quad (7.47)$$

Kasutades elastsusseoseid (7.29), (7.32)

$$[\sigma] = [\mathbf{D}] [\epsilon] = [\mathbf{C}^T] [\mathbf{C}] [\epsilon] \quad (7.48)$$

saame võimaliku deformatsioonienergia (7.47) kirjutada kujule

$$\delta U = \int_A [\delta \epsilon] [\mathbf{D}] [\epsilon] dxdy = \int_A [\delta \epsilon] [\mathbf{C}^T] [\mathbf{C}] [\epsilon] dxdy \quad (7.49)$$

Väljendades deformatsioonid kujufunktsioonide abil (7.5)

$$[\epsilon] = [\mathbf{B}] [d] \quad (7.50)$$

saame avaldisele (7.49) kuju

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_A [\delta d^T] \underbrace{[\mathbf{B}^T] [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]}_{\tilde{\mathbf{K}}} [d] dxdy = \\ &= \int_A [\delta d^T] \underbrace{[\mathbf{B}^T] [\mathbf{C}^T] [\mathbf{C}] [\mathbf{B}]}_{\tilde{\mathbf{K}}} [d] dxdy = \\ &= \int_A [\delta d^T] \underbrace{[\eta^T] [\eta]}_{\tilde{\mathbf{K}}} [d] dxdy \end{aligned} \quad (7.51)$$

kus

$$[\eta] = [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] \quad (7.52)$$

Jäikusmaatriks $\mathbf{K}$ saadakse järgmise integreerimisega:

$$[\mathbf{K}] = \int_A \tilde{\mathbf{K}} dxdy = \int_A [\mathbf{B}^T] [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dxdy = \int_A [\eta^T] [\eta] dxdy \quad (7.53)$$

Võimalik deformatsioonienergia jäikusmaatriksi kaudu

$$\delta U = [\delta d^T] [\mathbf{K}] [d] \quad (7.54)$$

Näide 7.1 Koostada jäikusmaatriksi $[\mathbf{K}]$ alammaatriks $[\mathbf{K}_{ij}]$ ($[\delta d_i^T] [\mathbf{K}_{ij}] [d_j]$). Jäikusmaatriksi avaldise kirjutame kujul

$$[\mathbf{K}_{ij}] = \int_A [\eta_i^T] [\eta_j] dxdy \quad (7.55)$$

Leiame $[\eta_j]$ avaldise

$$[\eta_j] = [\mathbf{C}] [\mathbf{B}_j] \quad (7.56)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \end{bmatrix} ; \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \nu \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_j \\
&= \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & \nu \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ 0 & \sqrt{1-\nu^2} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}_j \\
&\quad (7.57)
\end{aligned}$$

Korrutame $[\eta_i]$ $[\eta_j]$ -ga.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{E}{1-\nu^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} & \sqrt{1-\nu^2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} + \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \sqrt{1-\nu^2} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} = \eta_j \\
&= \eta_i \eta_j \quad (7.58)
\end{aligned}$$

Jäikusmaatriksi alammaatriksi leidmiseks tuleb avaldist (7.58) arvutit integreerida.

7.7 Võimaliku töö printsiip

Tasakaalus oleva süsteemi ja geomeetriliselt pidevate deformatsioonide puhul on võimaliku töö printsiip

$$\overbrace{\int_A \underbrace{[\delta \epsilon^T]}_{\text{Geomeetriliselt}} \underbrace{[\sigma]}_{\text{pidevad}} dA = \int_A \underbrace{[\delta u_i^T]}_{\text{deformatsioonid}} \underbrace{[\mathbf{F}_{\varrho i}]}_{\text{deformatsioonid}} dA + \int_{\Gamma} \underbrace{[\delta u_i^T]}_{\text{deformatsioonid}} \underbrace{[\mathbf{F}_{\mathbf{q}i}]}_{\text{deformatsioonid}} d\Gamma + \underbrace{[\delta d_N^T]}_{\text{deformatsioonid}} \underbrace{[\mathbf{F}_{\mathbf{N}}]}_{\text{deformatsioonid}}}_{\text{Geomeetriliselt pidevad deformatsioonid}} \quad (7.59)$$

kus

$[\mathbf{F}_{\varrho i}]$ – mahujõud,

$[\mathbf{F}_{\mathbf{q}i}]$ – rajajõud,

$[\mathbf{F}_{\mathbf{N}}]$ – sõlmkoormus.

Võimalik deformatsioonienergia

Võimalik deformatsioonienergia

$$\int_A [\delta \epsilon^T] [\sigma] dA = [\delta d^T] [\mathbf{K}] [d] \quad (7.60)$$

kus

$$dA = \det [J] d\xi d\eta, \quad \det [J] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (7.61)$$

Alamjäikusmaatriksi $[\mathbf{K}_{ij}]$ arvutame numbriliselt Gaussi integreerimisega

$$[\mathbf{K}_{ij}] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\eta_i^T] [\eta_j] \det [J] d\xi d\eta = \sum_{p=1}^N \sum_{g=1}^N A_p A_p [\eta_i^T] [\eta_j] \det [J] \quad (7.62)$$

siin A_p ja A_p on kaalud Gaussi integreerimispunktides (sõlmedes).

Võimalik mahujõudude töö

Võimaliku mahujõudude töö arvutamiseks taandame mahujõud sõlmedesse

$$\int_A [\delta u_i^T] [\mathbf{F}_{\varrho i}] dA = [\delta d_N^T] [\mathbf{F}_{\varrho \mathbf{N}}] \quad (7.63)$$

Elemendi suvalise punkti siirde avaldame sõlmpunktide siirete kaudu

$$[\delta u_i^T] = [\delta d_N^T] [\mathbf{N}^T] \quad (7.64)$$

kus $[\mathbf{N}^T]$ on kujufunktsioonide maatriks.

Sõlmedesse taandatud mahujõud $[\mathbf{F}_{\varrho\mathbf{N}}]$ arvutame numbrilise integreerimise abil

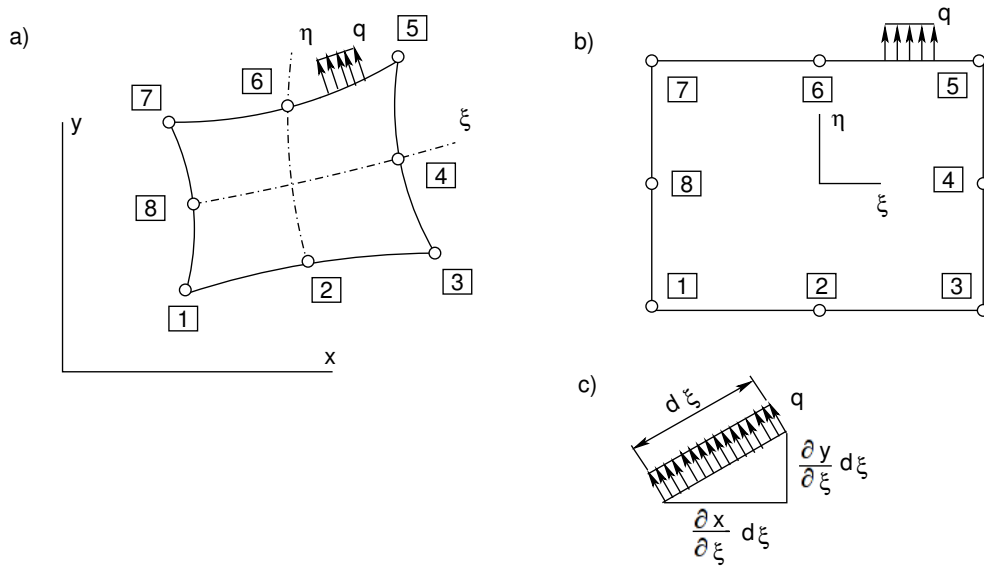
$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_{\varrho\mathbf{N}}] &= \begin{bmatrix} F_{\varrho x N} \\ F_{\varrho y N} \end{bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{N}^T] \begin{bmatrix} F_{\varrho x} \\ F_{\varrho y} \end{bmatrix} \det [J] d\xi d\eta = \\ &= \sum_{p=1}^N \sum_{g=1}^N A_p A_p [\mathbf{N}^T] \begin{bmatrix} F_{\varrho x} \\ F_{\varrho y} \end{bmatrix} \det [J] \end{aligned} \quad (7.65)$$

Võimalik rajajõudude töö

Võimaliku rajajõudude töö arvutamiseks taandame rajajõud sõlmedesse

$$\int_{\Gamma} [\delta u_i^T] [\mathbf{F}_{\mathbf{q}\mathbf{i}}] d\Gamma = [\delta d_N^T] [\mathbf{F}_{\mathbf{q}\mathbf{N}}] \quad (7.66)$$

Sõlmedesse taandatud rajajõud $[\mathbf{F}_{\mathbf{q}\mathbf{N}}]$ arvutame numbrilise integreerimise abil



Joonis 7.9. Koormuse taandamine sõlme

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_{\mathbf{q}\mathbf{N}}] &= \begin{bmatrix} F_{qxN} \\ F_{qyN} \end{bmatrix} = \int_{\Gamma} [\mathbf{N}^T] \begin{bmatrix} F_{qx}(x, y) \\ F_{qy}(x, y) \end{bmatrix} d\Gamma(x, y) = \\ &= \sum_{p=1}^N \sum_{g=1}^N A_p A_p [\mathbf{N}^T] \begin{bmatrix} F_{qx}(\xi, \eta) \\ F_{qy}(\xi, \eta) \end{bmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (7.67)$$

Olgu elemendi piirjoon antud vektorvõrrandiga

$$\vec{r}(x, y) = x(\xi, \eta) \vec{e}_1 + y(\xi, \eta) \vec{e}_2 \quad (7.68)$$

Kui $\eta = \text{const}$, siis

$$\vec{r}(x, y) = x(\xi) \vec{e}_1 + y(\xi) \vec{e}_2 \quad (7.69)$$

ja kui $\xi = \text{const}$, siis

$$\vec{r}(x, y) = x(\eta) \vec{e}_1 + y(\eta) \vec{e}_2 \quad (7.70)$$

Piirjoone element $d\Gamma(x, y)$ (joonis 7.9) mööda joont $\eta = \text{const}$

$$d\Gamma(\xi) = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} d\xi \quad (7.71)$$

$\xi = \text{const}$

$$d\Gamma(\eta) = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} d\eta \quad (7.72)$$

Elemendi piirjoone välisnormaal $\vec{n}$ joonel $\eta = \text{const}$

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}} \\ \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}} \end{bmatrix} \quad (7.73)$$

$\xi = \text{const}$

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-\frac{\partial y}{\partial \eta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}} \\ \frac{\frac{\partial x}{\partial \eta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}} \end{bmatrix} \quad (7.74)$$

Sõltuvalt elemendi piirjoonest $\eta = \text{const}$ ($\xi = \text{const}$) on lauskoormuse q (joonis 7.9) projektsioonid x - ja y -teljele

$$\begin{bmatrix} F_{qx}(\xi, \eta) \\ F_{qy}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q * n_1 \\ q * n_2 \end{bmatrix} \quad (7.75)$$

ning joone element $d\Gamma(\xi, \eta)$ (7.67), kas $d\Gamma(\xi)$ (7.71) või $d\Gamma(\eta)$ (7.72).

7.8 Pingete arvutus

Elastsusseosed $[\mathbf{D}]$ seovad pingeid $[\sigma]$ ja deformatsioone $[\epsilon]$. Deformatsioonid omakorda avalduvad maatriksi $[\mathbf{B}]$ ja elemendi sõlmpunktide siirete $[d]$ kaudu

$$[\sigma] = [\mathbf{D}] [\epsilon] = [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] [d] = [\mathbf{S}] [d] \quad (7.76)$$

kus

$$[\mathbf{S}] = [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] = [\mathbf{C}^T] [\eta] [d] \quad (7.77)$$

Tähistame tasandülesande elastsuskonstantide maatriksi $[\mathbf{D}]$ ($[\mathbf{C}]$) (7.31) ja (7.34) elemendid d_{ij} -ga (c_{ij})

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \quad (7.78)$$

Maatriks $[\eta]$ koosneb alammaatriksitest $[\eta_j]$

$$[\eta] = \begin{bmatrix} [\eta_1] & [\eta_2] & \dots & [\eta_j] & \dots & [\eta_n] \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

kus

$$[\eta_j] = \begin{bmatrix} c_{11} \frac{\partial N_j}{\partial x} & c_{12} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ 0 & c_{22} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ c_{33} \frac{\partial N_j}{\partial y} & c_{33} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.80)$$

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} c_{11} \frac{\partial N_j}{\partial x} & c_{12} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ 0 & c_{22} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ c_{33} \frac{\partial N_j}{\partial y} & c_{33} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} = \eta_j$$

$$\begin{bmatrix} c_{11}^2 \frac{\partial N_j}{\partial x} & c_{11} c_{12} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ c_{11} c_{12} \frac{\partial N_j}{\partial x} & (c_{11}^2 + c_{22}^2) \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ c_{33}^2 \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \frac{\partial N_j}{\partial y} & c_{33}^2 \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_j \quad (7.81)$$

Pingemaatriks $[\mathbf{S}]$ koosneb alammaatriksitest $[\mathbf{S}_j]$

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{S}_1] & [\mathbf{S}_2] & \dots & [\mathbf{S}_j] & \dots & [\mathbf{S}_n] \end{bmatrix} \quad (7.82)$$

Võtame arvesse elastsuskonstantide maatriksi $[\mathbf{D}]$ ja Cholesky lahutusega saadud maatriksi $[\mathbf{C}]$ elementide vahelised seosed

$$\begin{aligned} d_{11} &= c_{11}^2, & d_{12} &= c_{11} c_{12} \\ d_{22} &= c_{11}^2 + c_{22}^2, & d_{33} &= c_{33}^2 \end{aligned} \quad (7.83)$$

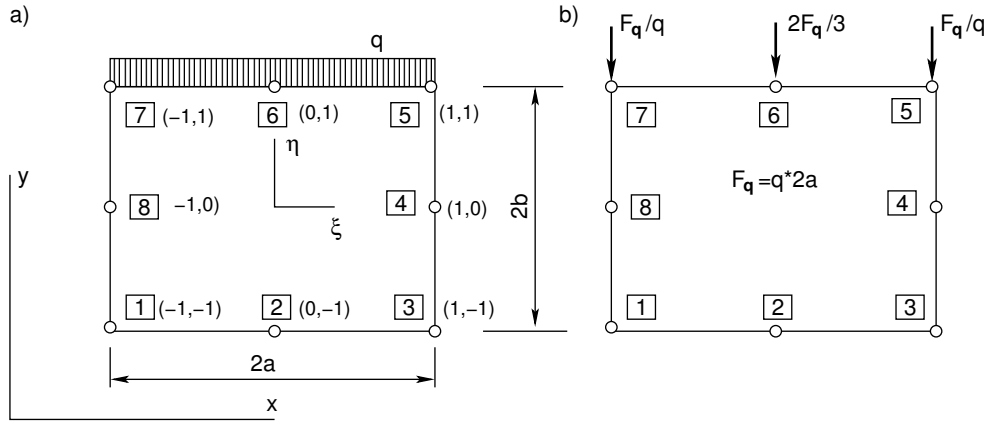
Pingemaatriks $[\mathbf{S}_j]$ on

$$[\mathbf{S}_j] = \begin{bmatrix} d_{11} \frac{\partial N_j}{\partial x} & d_{12} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ d_{12} \frac{\partial N_j}{\partial x} & d_{22} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ d_{33} \frac{\partial N_j}{\partial y} & d_{33} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.84)$$

7.9 Näiteid koormuste taandamisest

Näide 7.2 Taandada nelinurksele elemendile (8 sõlmega) mõjuv ühtlane lauskoormus $-q$ (joonis 7.10) sõlmehesse. Elemendi laius on $2a$ ja kõrgus $2b$. Seega mõjub elemendile jõud $F = q * 2a$.

Lähme üle mõõduta koordinaatidele ξ ja η .



Joonis 7.10. Lauskoormuse taandamine sõlme

$$\begin{aligned} x &= a\xi, & y &= b\eta \\ dx &= ad\xi, & (\eta &= 1) \end{aligned} \quad (7.85)$$

Taandame koormuse sõlmehesse $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$

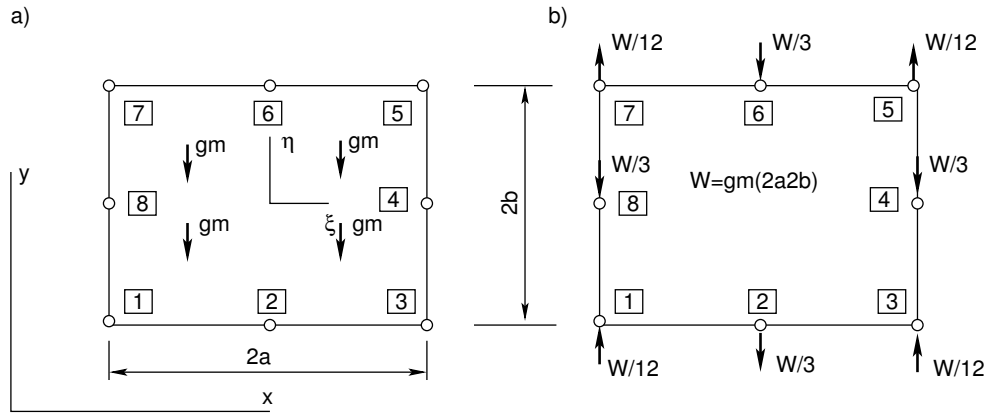
$$[\mathbf{F}_{\mathbf{qN}}] = \begin{bmatrix} F_{qy5} \\ F_{qy6} \\ F_{qy7} \end{bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_5 \\ N_6 \\ N_7 \end{bmatrix} (-q) ad\xi \quad (7.86)$$

Poole elemendile mõjuva koormuse $(-qa)$ tähistame $-\frac{F}{2}$ ja teostame integreerimised

$$\begin{aligned} F_{qy5} &= -\frac{F}{2} \int_{-1}^{+1} N_5 d\xi = -\frac{F}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1+\xi) 2(\xi+1-1) d\xi = -\frac{F}{6} \\ F_{qy6} &= -\frac{F}{2} \int_{-1}^{+1} N_6 d\xi = -\frac{F}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1-\xi^2) 2d\xi = -\frac{2F}{3} \\ F_{qy7} &= -\frac{F}{2} \int_{-1}^{+1} N_7 d\xi = -\frac{F}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1-\xi) 2(-\xi+1-1) d\xi = -\frac{F}{6} \end{aligned} \quad (7.87)$$

Taandatud koormused (7.87) on näidatud joonisel 7.10 b.

Näide 7.3 Taandada nelinurkse elemendi (8 sõlmega), (joonis 7.11) omakaal (gm) sõlmedesse. Elemendi laius on $2a$ ja kõrgus $2b$. Seega mõjub elemendile jõud $W = gm * 2a2b$. Lähme üle mõõduta koordinaatidele ξ ja η .



Joonis 7.11. Omakaalu taandamine sõlme

$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad dx = ad\xi \quad (7.88)$$

Omakaalu taandame sõlmedesse järgmise avaldisega:

$$[\mathbf{F}_{\varrho\mathbf{N}}] = \begin{bmatrix} F_{\varrho x N} \\ F_{\varrho y N} \end{bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\mathbf{N}^T] \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta \quad (7.89)$$

kus

$$\det[J] = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab \quad (7.90)$$

Kuna omakaalu projektsioonid x -teljele puuduvad, siis

$$[\mathbf{F}_{\varrho\mathbf{N}}] = \begin{bmatrix} F_{\varrho y 1} \\ F_{\varrho y 2} \\ F_{\varrho y 3} \\ F_{\varrho y 4} \\ F_{\varrho y 5} \\ F_{\varrho y 6} \\ F_{\varrho y 7} \\ F_{\varrho y 8} \end{bmatrix} = -mgab \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{bmatrix} d\xi d\eta = W \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (7.91)$$

kus

$$W = mg4ab \quad (7.92)$$

Kujufunktsioonid N_i ($i = 1, 3, 5, 7$) on

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) (\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \quad , \quad (i = 1, 3, 5, 7) \quad (7.93)$$

Avaldise (7.91) liikmete F_{gyi} ($i = 1, 3, 5, 7$) integraalid on

$$F_{gyi} = -\frac{W}{16} (I_1 + I_2 + I_3) \quad , \quad (i = 1, 3, 5, 7) \quad (7.94)$$

siin

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \xi \xi_i d\xi d\eta = \int_{-1}^{+1} (1 + \xi \xi_i) \xi \xi_i d\xi \left[\eta + \frac{\eta^2 \eta_i}{2} \right]_{-1}^{+1} = \\ &= 2\xi_i \left[\frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} \xi_i \right]_{-1}^{+1} = \frac{4}{3} \xi_i^2 = \frac{4}{3} \end{aligned} \quad (7.95)$$

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) \eta \eta_i d\xi d\eta = \frac{4}{3} \eta_i^2 = \frac{4}{3} \quad (7.96)$$

$$\begin{aligned} I_3 &= - \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i) d\xi d\eta = - \int_{-1}^{+1} (1 + \xi \xi_i) d\xi \int_{-1}^{+1} (1 + \eta \eta_i) d\eta = \\ &= - \left[\xi + \frac{\xi^2 \xi_i}{2} \right]_{-1}^{+1} \left[\eta + \frac{\eta^2 \eta_i}{2} \right]_{-1}^{+1} = -4 \end{aligned} \quad (7.97)$$

Asetades leitud avaldised (7.95), (7.96), (7.97) avaldisse (7.94), saame

$$F_{gyi} = -\frac{W}{16} \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - 4 \right) = \frac{W}{12}, \quad (i = 1, 3, 5, 7) \quad (7.98)$$

Avaldise (7.91) liikmete F_{gyi} ($i = 2, 6$) integraalid on

$$\begin{aligned} F_{gyi} &= -\frac{W}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i d\xi d\eta = -\frac{W}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta_i) d\xi d\eta = \\ &= -\frac{W}{8} \int_{-1}^{+1} (1 + \eta \eta_i) d\eta \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) d\xi = -\frac{W}{8} \left[\eta + \frac{\eta^2 \eta_i}{2} \right]_{-1}^{+1} \left[\xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = \\ &= -\frac{W}{8} (2) \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = -\frac{W}{3}, \quad (i = 2, 6) \end{aligned} \quad (7.99)$$

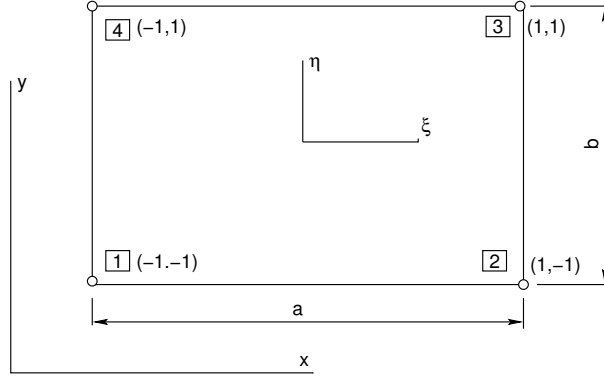
Avaldise (7.91) liikmete F_{gyi} ($i = 4, 8$) integraalid on

$$\begin{aligned} F_{gyi} &= -\frac{W}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i d\xi d\eta = -\frac{W}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta^2) d\xi d\eta = \\ &= -\frac{W}{8} \int_{-1}^{+1} (1 + \xi \xi_i) d\xi \int_{-1}^{+1} (1 - \eta^2) d\eta = -\frac{W}{8} \left[\xi + \frac{\xi^2 \xi_i}{2} \right]_{-1}^{+1} \left[\eta - \frac{\eta^3}{3} \right]_{-1}^{+1} = \\ &= -\frac{W}{8} (2) \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = -\frac{W}{3}, \quad (i = 4, 8) \end{aligned} \quad (7.100)$$

Omakaalud sõlmedes on näidatud joonisel 7.11.

Näide 7.4 Koostada nelinurkse elemendi (4 sõlme), (joonis 7.12) jäikusmaatriks. Elemendi laius on a ja kõrgus b .

Lähme üle mõõduta koordinaatidele ξ ja η .



Joonis 7.12. Bilineaarse elemendi jäikusmaatriks

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}\xi, & y &= \frac{b}{2}\eta \\ dx &= \frac{a}{2}d\xi, & dy &= \frac{b}{2}d\eta \end{aligned} \quad (7.101)$$

Nelinurkse elemendi kujufunktsioonid N_i

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i), \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (7.102)$$

Jacobi maatriks $[J]$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \quad (7.103)$$

Jakobiaan $|J|$

$$|J| = \det [J] = \frac{ab}{4} \quad (7.104)$$

Jacobi pöördmaatriks $[J^{-1}]$

$$[J^{-1}] = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix} \quad (7.105)$$

Kujufunktsioonide tuletised $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i}{\partial y}$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} &= [J^{-1}] \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{4}{ab} \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{a}{2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{2}{b} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2a} \xi_i (1 + \eta\eta_i) \\ \frac{1}{2b} \eta_i (1 + \xi\xi_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.106)$$

Kujufunktsioonid lahti kirjutatult

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= -\frac{1}{2a}(1-\eta), & \frac{\partial N_1}{\partial y} &= -\frac{1}{2b}(1-\xi) \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{1}{2a}(1-\eta), & \frac{\partial N_1}{\partial y} &= -\frac{1}{2b}(1+\xi) \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} &= \frac{1}{2a}(1+\eta), & \frac{\partial N_3}{\partial y} &= \frac{1}{2b}(1+\xi) \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} &= -\frac{1}{2a}(1+\eta), & \frac{\partial N_4}{\partial y} &= -\frac{1}{2b}(1-\xi) \end{aligned} \quad (7.107)$$

Vormifunktsioonide integraalid

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 \pm \xi)^2 d\xi d\eta &= \frac{16}{3}, & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2) d\xi d\eta &= \frac{8}{3} \\ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 - \eta^2) d\xi d\eta &= \frac{8}{3}, & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (1 \pm \xi)(1 \pm \eta) d\xi d\eta &= 4 \end{aligned} \quad (7.108)$$

Jäikusmaatriksi $[K]$ alammaatriksid $[K_{ij}]$ (7.55)

$$[\mathbf{K}_{ij}] = \int_A [\eta_i^T] [\eta_j] |J_A| d\xi d\eta \quad (7.109)$$

Tasandpinguse puhul on korrutis $[\eta_i \eta_j]$ toodud avaldisega (7.58)

$$[\eta_i^T \eta_j] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \nu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \nu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7.110)$$

Võtame kasutusele tähistused

$$p = \frac{a}{b}, \quad p^{-1} = \frac{b}{a} \quad (7.111)$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (7.112)$$

Tasandpinguse puhul on jäikusmaatriks $[K]$ (7.113) ja pingemaatriks $[S]$ (7.114).

[illegible]

$$[S] = \begin{bmatrix} -\frac{d_{11}}{2a} (1-\eta) & -\frac{d_{12}}{2b} (1-\xi) & \dots & \frac{d_{11}}{2a} (1-\eta) & -\frac{d_{12}}{2b} (1-\xi) & \dots & -\frac{d_{11}}{2a} (1+\eta) & \frac{d_{12}}{2b} (1+\xi) & \dots & \frac{d_{12}}{2b} (1-\xi) \\ \dots & \dots & -\frac{d_{22}}{2b} (1-\eta) & \dots & -\frac{d_{22}}{2b} (1-\xi) & \dots & -\frac{d_{12}}{2a} (1-\eta) & \frac{d_{22}}{2b} (1+\xi) & \dots & \frac{d_{22}}{2b} (1-\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{d_{33}}{2a} (1-\xi) & -\frac{d_{33}}{2a} (1-\eta) & \dots & -\frac{d_{33}}{2b} (1+\xi) & -\frac{d_{33}}{2a} (1-\eta) & \dots & \frac{d_{33}}{2b} (1-\xi) & \frac{d_{33}}{2a} (1+\eta) & \dots & -\frac{d_{33}}{2a} (1+\eta) \end{bmatrix} \quad (7.114)$$

Peatükk 8

Plaaditeooria

8.1 Üldosa

8.1.1 Põhimõisted

Plaaditeooriaga võib tutvuda õpiku abil [7]. Toome sealt mõned põhimõisted.

Plaadiks nimetatakse prismaalset või silindrilist keha, mille kõrgus (plaadi paksus) on võrreldes teiste mõõtmetega väike.

Pinda, mis jagab plaadi paksuse kaheks võrdsks osaks, nimetatakse plaadi *keskpinnaks*. Deformeerumata plaadi keskpind on tasandiline.

Plaadi paksus võib olla ühtlane või muutuv.

Plaati, mille elastsusomadused on kõigis suundades ühesugused, nimetatakse *isotroopseks*; vastasel juhul on plaat *anisotroopne*. Anisotroopsete plaatide erijuhuks on *ortotroopne* plaat. Sellise plaadi pinnas võib eraldada kahte teineteisega risti olevat sihti, milles rakendatud ühtlaselt jaotatud jõud ei põhjusta nende sihtide vahelise nurga muutust (nihet). Tüüpiliseks näiteks on vineerplaat.

Plaate liigitatakse:

- õhukesed plaadid; plaadi lühema külje pikkus b ületab plaadi kõrguse h vähemalt viis korda

$$\frac{b}{h} \geq 5 \quad (8.1)$$

- paksud plaadid

Nii nagu tala puhul võib plaadi ristlõikes vaadelda normaalpingeid koosnevana kahest komponendist: paindepingetest, mis plaadi keskpinnal võrduvad nulliga ning kasvavad proportsionaalselt kaugusega keskpinnast, ja pikkepingetest, mis on ühtlased üle plaadi paksuse. Pikkepingeid nimetatakse ka *ahelpingeteks*.

Painde- ja ahelpingete osatähtsuse järgi liigitatakse plaate

- *jäikadeks plaatideks*. Nende arvutamisel võib ahelpingetest loobuda, kuna ahelpinged on väiksemad kui paindepinged. Sellesse rühma kuuluvad raudbetoonplaadid, aga ka väikese läbipaindega terasplaadid;

- *painduvateks plaatideks*. Nende arvutamisel peab arvesse võtma nii painde- kui ka ahelpingete mõju. Sellesse rühma kuulub enamik terasplaate;
- *membraanideks*. Nende puhul võib hüljata paindepinged, kuna need on ahelpingetest tunduvalt väiksemad. Membraani analoogiks on painduv niit.

Kas plaati arvutada nagu jäika plaati, painduvat plaati või membraani, sõltub koormuse iseloomust ja plaadi kõrguse ning läbipainde suhtest. Orienteerivalt võib plaati arvutada jäigana, kui plaadi paksus on vähemalt 3 korda suurem maksimaalsest läbipaindest, ja membraanina, kui läbipaine on enam kui 5 korda suurem plaadi paksusest.

8.1.2 Plaatide paindeteooria hüpoteesid

Need hüpoteesid koosnevad elastsusteooria hüpoteesidest aine omaduste kohta ja eri hüpoteesidest, et lihtsustada plaatide paindeteooriat.

Plaatide paindeteooriad.

- Kirchhoffi teooria. Õhukeste plaatide paindeteooria. Nihkedeformatsioonid plaadi paksuse suunal hüljatakse. Nihkepinged samal suunal saadakse tasakaaluvõrranditest.
- Timošenko teooria. Võetakse arvesse nihkedeformatsioonid, mille jaotus plaadi paksuse suunal loetakse paraboolseks. Nihkest tekkiv ristlõike deplanatsioon hüljatakse.

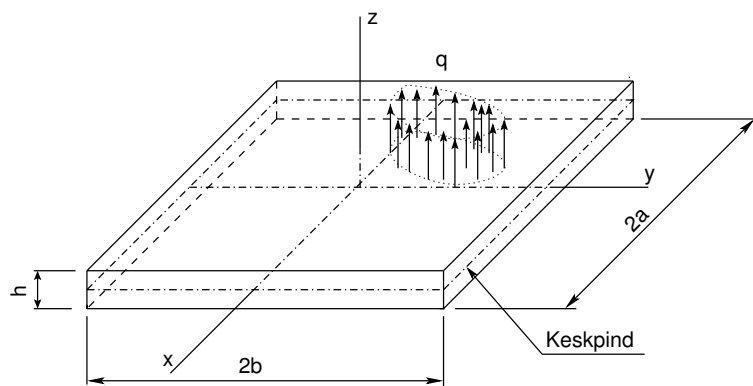
Edaspidi vaadeldakse ainult õhukesi plaate.
õhukeste plaatide paindeteooria hüpoteesid.

1. *Sirgete normaalide hüpotees*: sirgjoonelised elemendid, mis enne deformatsiooni olid plaadi keskpinnaga risti, jäävad ka pärast deformatsiooni sirgeteks ja keskpinnaga risti.
2. Pinged, mis tekivad plaadi keskpinnaga paralleelsete kihtide rõhumisest üksteisele, on hüljatavalt väikesed.
3. Plaadi keskpinna punktid siirduvad ainult plaadi keskpinnaga ristsuunas; keskpinna punktide siirded plaadi pinnas võrduvad nulliga. Keskpinna deformeerumisest tekkivad pinged on hüljatavalt väikesed.

8.2 Õhukeste plaatide paindeteooriast

8.2.1 Plaadi sisejõud

Vaatleme plaati (joonis 8.1), mille paksus on h ja mis on koormatud ühtlaselt jaotatud koormusega $q = konst$. Plaadi ristlõikepindades mõjuvad pinged σ_{xx} , σ_{xy} , σ_{xz} ja σ_{yx} ,

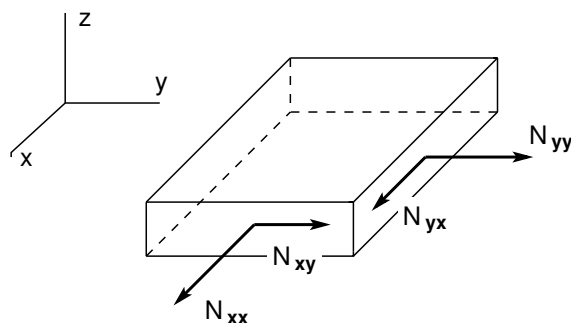


Joonis 8.1. Plaat ja teljestik

σ_{yy} , σ_{yz} . Määratleme pingete kaudu plaadi sisejõudude ja momentide intensiivsused. Aheljõudude intensiivsused (joonis 8.2)

$$\begin{aligned}
 N_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xx} dz \\
 N_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yy} dz \\
 N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \\
 N_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yx} dz
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Nii nagu näha jooniselt 8.2, on N_{xx} pikijõud ühe pikkusühiku kohta x -suunas, N_{yy}



Joonis 8.2. Pikijõudude intensiivsused

pikijõud ühe pikkusühiku kohta y -suunas ja N_{xy} ning N_{yx} horisontaalsed nihkejõud

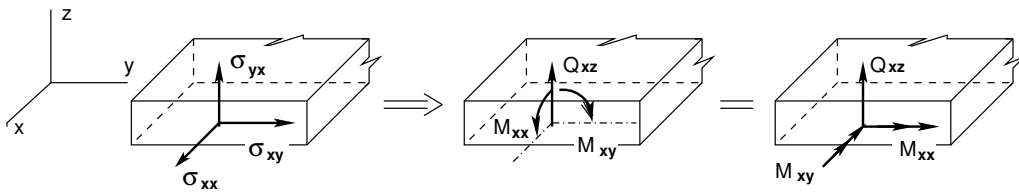
ühe pikkusühiku kohta y – ja x –suunas (esimene indeks näitab pinda ja teine suunda). Plaadi ristlõikepindades mõjuvad põikjõu intensiivsused

$$\begin{aligned} Q_{xz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz \\ Q_{yz} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz \end{aligned} \quad (8.3)$$

Plaadi ristlõikepindades mõjuvad momentide intensiivsused

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{xx} dz \\ M_{yy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{yy} dz \\ M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{xy} dz \\ M_{yx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{yx} dz \end{aligned} \quad (8.4)$$

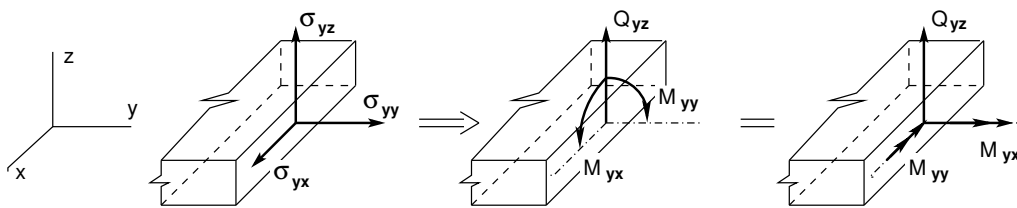
Joonisel 8.3 on näidatud põikjõu ja momenti intensiivsused ristlõikepinnal, mille normaal on x –telje sihil. Momentide tähistusena kasutatakse ka kahekordseid nooli.



Joonis 8.3. Põikjõud Q_{xz} ja momendid M_{xx}, M_{xy}

Jõudude ja momentide positiivsed suunad on joonisel 8.3, mis vastavad elastsusteooria ja parema käe teljestiku märgireeglitele.

Joonisel 8.4 on põikjõu ja momenti intensiivsused ristlõikepinnal, mille normaal on y –telje sihil.

Joonis 8.4. Põikjõud Q_{yz} ja momendid M_{yx}, M_{yy}

8.2.2 Plaadi tasakaaluvõrrandid

Edaspidi kasutame lühiduse mõttes terminite *põikjõu intensiivsus* ja *paindemomendi intensiivsus* asemel termineid *põikjõud* ja *paindemoment*, arvestades, et nende mõõtmed on vastavalt Nm ja N (kNm ja kN).

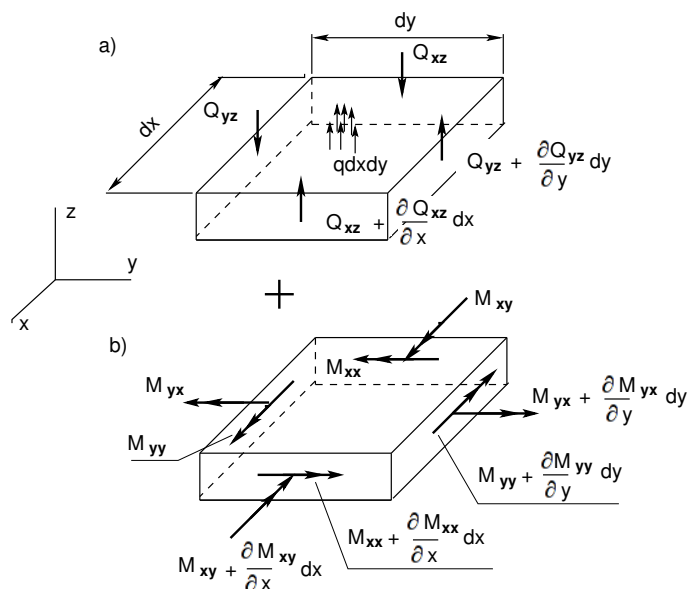
õhukeste plaatide teooria kolmanda hüpoteesi kohaselt on aheljõud nullid

$$N_{xx} = N_{yy} = N_{xy} = N_{yx} = 0 \quad (8.5)$$

Nihkejõudude paarsuse seadusest ($\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$) tuleneb

$$M_{xy} = M_{yx} \quad (8.6)$$

Vaatleme plaadi elementi $dx dy$ (joonis 8.5), mis on koormatud jõuga $q dx dy$. Põikjõude ja momente on joonisel 8.5 näidatud eraldi. Koostame tasakaaluvõrrandi z -teljele



Joonis 8.5. Plaadi tasakaaluvõrrandid

$$\begin{aligned} \sum Z = 0 : & \quad q dx dy - Q_{yz} dx + \\ & + \left(Q_{xz} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_{yz} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} dy \right) dx - Q_{xz} dy = 0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

millest pärast taandamist ja läbijagamist $dx dy$ -ga saab

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + q = 0 \quad (8.8)$$

Koostame momentide tasakaaluvõrrandi telje suhtes, mis on paralleelne x -teljega ja läbib plaadi parempoolset serva

$$\begin{aligned} \sum M_y = 0 : & \quad -q dx dy \frac{1}{2} dy + Q_{yz} dx dy - \\ & - \left(Q_{xz} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} dx \right) dy \frac{1}{2} dy + Q_{xz} dy \frac{1}{2} dy + M_{yy} dx - \\ & - \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx \right) dy - \left(M_{yy} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} dy \right) dx + M_{xy} dy = 0 \end{aligned} \quad (8.9)$$

millest saab

$$\underbrace{-q \frac{1}{2} dy + Q_{yz}}_{\approx 0} - \underbrace{\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \frac{1}{2} dy}_{\approx 0} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (8.10)$$

Kuna dy on lõpmatult väike suurus, siis jätame ta ära

$$\boxed{\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = Q_{yz}} \quad (8.11)$$

Momentide tasakaaluvõrrand telje suhtes, mis on paralleelne y -teljega ja läbib plaadi serva, annab analoogiliselt eelnenuga

$$\boxed{\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_{xz}} \quad (8.12)$$

Avaldised (8.11), (8.12) võimaldavad määrata põikjõud, kuna õhukeste plaatide hüpoteesides hüljatakse vastavad nihkedeformatsioonid ($\gamma_{xz} \approx 0$, $\gamma_{yz} \approx 0$).

Diferentseerime avaldist (8.11) y järgi ja avaldist (8.12) x järgi. Liidame saadud tulemused ning võtame arvesse avaldise (8.8), saades

$$\boxed{\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = 0} \quad (8.13)$$

8.2.3 Plaadi deformatsioonid

Vastavalt õhukeste plaatide teooria esimesele hüpoteesile: *sirgjoonelised elemendid, mis enne deformatsiooni olid plaadi keskpinnaga risti, jäävad ka pärast deformatsiooni sirgjoonelisteks ja keskpinnaga risti*, saame avaldada siirded

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u^o(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v^o(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (8.14)$$

kus u^o , v^o on plaadi keskpinna siirded plaadi tasapinnas xy ja w plaadi siire z -telje suunas.

Plaadi deformatsioonide ϵ_x , ϵ_y ja γ_{xy} kirjeldamiseks kasutame tasandülesandes määratud deformatsioonide avaldist (7.4)

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^o}{\partial x} - \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v^o}{\partial y} - \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

ja deformatsioonid

$$\epsilon_z \approx 0, \quad \gamma_{xz} \approx 0, \quad \gamma_{yz} \approx 0 \quad (8.16)$$

Tihti kirjutatakse, et ϵ_z , γ_{xz} ja γ_{yz} on nullid, s.t nihkedeformatsioone ei ole, aga vastavad nihkepingsed või nihkejõud on olemas (niisugune olukord on võimalik ainult momentidega elastsusteoorias). Meie hülgame nihkedeformatsioonid, võrreldes neid teiste deformatsioonidega.

Deformatsioonid (8.15) võib kirjutada kujul

$$[\epsilon] = [\epsilon^0] - z [\mathbf{k}] \quad (8.17)$$

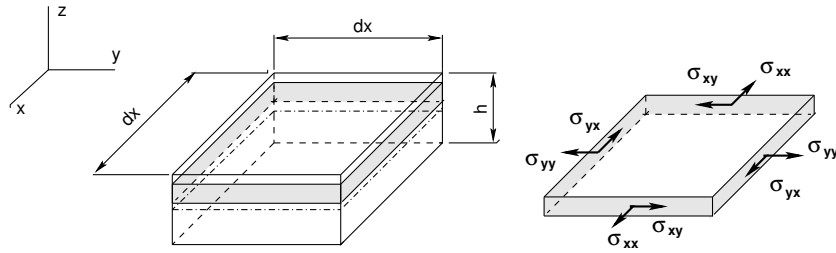
kus

$$[\epsilon^0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^o}{\partial x} \\ \frac{\partial v^o}{\partial y} \\ \frac{\partial u^o}{\partial y} + \frac{\partial v^o}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

Avaldises (8.18) $[\mathbf{k}]$ on kõverusmaatriks.

8.2.4 Plaadi elastsusseosed

Plaadi pingeolukorda võib vaadelda kui tasandpingust (joonis 8.6), kus pinged keskpinnaga paralleelsete kihtide vahel hüljatakse. Pingete ja deformatsioonide vaheline



Joonis 8.6. Plaadi tasandpingus

seos

$$[\sigma] = [\mathbf{D}] [\epsilon] = [\mathbf{D}] [\epsilon^0] - z [\mathbf{D}] [\mathbf{k}] \quad (8.19)$$

kus pinged $[\sigma]$ ja deformatsioonid $[\epsilon]$ on

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

ning isotroopse materjali ja tasandpinguse korral $[\mathbf{D}]$ on

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

Defineerime momentide vektori $[\mathbf{M}]$

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (8.22)$$

Kasutades elastsusseost (8.19), saame momendivektori

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{D}] [\epsilon^0] \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz - [\mathbf{D}] [\mathbf{k}] \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz \quad (8.23)$$

Kuna

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \quad (8.24)$$

siis

$$[\mathbf{M}] = - [\tilde{\mathbf{D}}] [\mathbf{k}] \quad (8.25)$$

kus

$$[\tilde{\mathbf{D}}] = \frac{h^3}{12} [\mathbf{D}] \quad (8.26)$$

Suurust $[\tilde{\mathbf{D}}]$ avaldises (8.26) nimetatakse plaadi *silindriliseks jäikuseks*.

8.2.5 Plaadi diferentsiaalvõrrandid

Võtame kasutusele diferentseerimise vektori ∇^* [16]

$$\nabla^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

Kasutades diferentseerimise vektori ∇^* , võime tasakaaluvõrrandid (8.13) ja momendi avaldise (8.25) kirjutada järgmisel kujul:

$$\begin{bmatrix} \nabla^* \end{bmatrix}^T [\mathbf{M}] + q = 0 \quad (8.28)$$

$$[\mathbf{M}] = - [\tilde{\mathbf{D}}] \begin{bmatrix} \nabla^* \end{bmatrix} w \quad (8.29)$$

Asetades momendi avaldise (8.29) tasakaaluvõrrandisse (8.28), saame plaadi tasakaaluvõrrandi siirde w kaudu

$$\begin{bmatrix} \nabla^* \end{bmatrix}^T [\tilde{\mathbf{D}}] \begin{bmatrix} \nabla^* \end{bmatrix} w = q \quad (8.30)$$

Kirjutame võrrandi (8.30) lahti

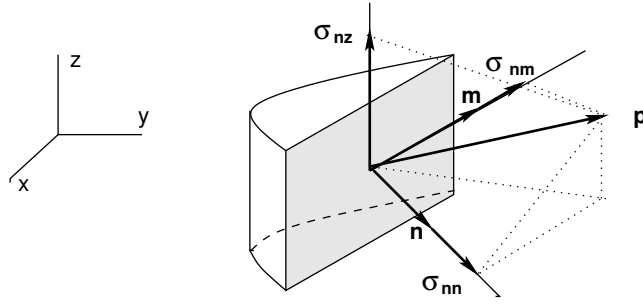
$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12(1 - \nu^2)}{Eh^3} q} \quad (8.31)$$

Diferentsiaalvõrrand (8.31) on *biharmooniline võrrand*, mille esmalt tuletas Lagrange 1811. aastal. Vaadeldud plaaditeooria tuletas Kirchhoff 1850. aastal. Tema nime järgi kutsutakse seda *Kirchhoffi plaaditeooriaks*.

8.2.6 Momendid ja põikjõud plaadi suvalises ristlõikes

Tasandülesandes avaldasime pingvektori $\vec{p}_n$ kaldpinnal pingete kaudu (7.19). Momentide ja põikjõudude avaldamiseks suvalises ristlõikes vaatleme joonist 8.7. Plaadi ristlõike pinnanormaali $\mathbf{n}$ ja temaga risti plaadi keskpinnal oleva vektori $\mathbf{m}$ projektsioonid x -, y -, z -teljele. Plaadi ristlõike pinnanormaali $\mathbf{n}$ ja temaga risti plaadi keskpinnal oleva vektori $\mathbf{m}$ projektsioonid x -, y -, z -teljele

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$



Joonis 8.7. Pingevektor plaadi serval

Vektorid $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ on ühikvektorid ja teineteisega risti, s.t

$$|\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = 1 \quad , \quad \mathbf{n}^T \mathbf{m} = 0 \quad (8.33)$$

Pingevektor $\mathbf{p}$ plaadi suvalises ristlõikes ($n_z = 0$)

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad (8.34)$$

Pinged σ_{nm} plaadi suvalises ristlõikes

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= \mathbf{n}^T \mathbf{p} \\ \sigma_{nm} &= \mathbf{m}^T \mathbf{p} \\ \sigma_{nz} &= [001] \mathbf{p} \end{aligned} \quad (8.35)$$

Avaldise (8.35) saab lahti kirjutada nii

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} &= n_x^2 \sigma_{xx} + n_y^2 \sigma_{yy} + 2n_x n_y \sigma_{xy} \\ \sigma_{nm} &= n_x m_x \sigma_{xx} + n_y m_y \sigma_{yy} + (n_y m_x + n_x m_y) \sigma_{xy} \\ \sigma_{nz} &= n_{xy} \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (8.36)$$

Määratleme paindemomendid M_{nn} , M_{nm} ja põikjõu Q_{nz} plaadi suvalises ristlõikes

$$\begin{aligned} M_{nn} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{nn} dz \\ M_{nm} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z \sigma_{nm} dz \\ Q_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{nz} dz \end{aligned} \quad (8.37)$$

Asetades pinged (8.36) avaldisse (8.37), saame

$$\begin{aligned} M_{nn} &= n_x^2 M_{xx} + n_y^2 M_{yy} + 2n_x n_y M_{xy} \\ M_{nm} &= n_x m_x M_{xx} + n_y m_y M_{yy} + (n_y m_x + n_x m_y) M_{xy} \\ Q_{xy} &= n_{xy} Q_{xz} + n_y Q_{yz} \end{aligned} \quad (8.38)$$

8.2.7 Vektorarvutuste seoseid

Kasutame diferentseerimise vektorit ∇ (nablat)

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \nabla \Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8.39)$$

kus $\nabla \Phi$ on funktsiooni Φ *gradient*.

Funktsiooni Φ diferentsiaal

$$d\Phi = (\nabla \Phi)^T d\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (8.40)$$

Olgu suuna $d\mathbf{r}$ ühikvektor $\mathbf{m}$

$$|d\mathbf{r}| = dm = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{m}| = 1 \quad (8.41)$$

siis

$$\frac{d\Phi}{dm} = (\nabla \Phi)^T \mathbf{m} \quad (8.42)$$

Puutuja vektoriga $\mathbf{m}$ risti olev vektor $\mathbf{n}$ on antud avaldisega (8.34). Momendid suvalises ristlõikes saab esitada kujul

$$M_{nn} = \mathbf{n}^T \mathbf{A} \mathbf{n}, \quad M_{nm} = \mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{n} \quad (8.43)$$

kus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{xy} & M_{yy} \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

Korrutame $\mathbf{n}$ M_{nn} -iga ja $\mathbf{m}$ M_{nm} -iga ning liidame

$$\mathbf{n} M_{nn} + \mathbf{m} M_{nm} = (\mathbf{n} \mathbf{n}^T + \mathbf{m} \mathbf{m}^T) \mathbf{A} \mathbf{n} \quad (8.45)$$

siin kasutasime avaldist (8.43).

Tähistame avaldise (8.45) parempoolse liikme sulgudes oleva avaldise $\mathbf{R}$ -iga

$$\mathbf{R} = (\mathbf{n} \mathbf{n}^T + \mathbf{m} \mathbf{m}^T) \quad (8.46)$$

ja näitame, et see on ühikmaatriks.

Kuna $\mathbf{n}$ ja $\mathbf{m}$ on risti olevad ühikvektorid, siis võib suvalise vektori $\mathbf{r}$ esitada nende kaudu

$$\mathbf{r} = \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{m} \quad (8.47)$$

kus α ja β on vektori $\mathbf{r}$ projektsioonid risti olevatele vektoritele.

Korrutame avaldist (8.47) maatriksiga $\mathbf{R}$ (8.46)

$$\mathbf{R}\mathbf{r} = \mathbf{r} \quad , \quad (\mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{r} = 0 \quad (8.48)$$

Kuna see tingimus on täidetud suvalise vektori $\mathbf{r}$ puhul, siis $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ ja

$$\mathbf{R} = (\mathbf{n}\mathbf{n}^T + \mathbf{m}\mathbf{m}^T) = \mathbf{I} \quad (8.49)$$

Nüüd saab avaldise (8.45) esitada järgmisel kujul:

$$\mathbf{n}M_{nn} + \mathbf{m}M_{nm} = \mathbf{A}\mathbf{n} \quad (8.50)$$

Korrutame avaldise (8.50) suurusega $(\nabla\hat{w})^T$, kus $\hat{w}(x, y)$ on suvaline funktsioon ja $\nabla\hat{w}$ tähistab funktsiooni $\hat{w}$ gradienti

$$(\nabla\hat{w})^T \mathbf{n}M_{nn} + (\nabla\hat{w})^T \mathbf{m}M_{nm} = (\nabla\hat{w})^T \mathbf{A}\mathbf{n} \quad (8.51)$$

Arvestades seost (8.42), saame avaldisest (8.51)

$$\frac{d\hat{w}}{dn}M_{nn} + \frac{d\hat{w}}{dm}M_{nm} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\hat{w}}{\partial x} & \frac{\partial\hat{w}}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xx}n_x + M_{xy}n_y \\ M_{xy}n_x + M_{yy}n_y \end{bmatrix} \quad (8.52)$$

Edaspidi kasutame seost (8.52) plaadi virtuaalsiirete printsiibi väljatoomisel.

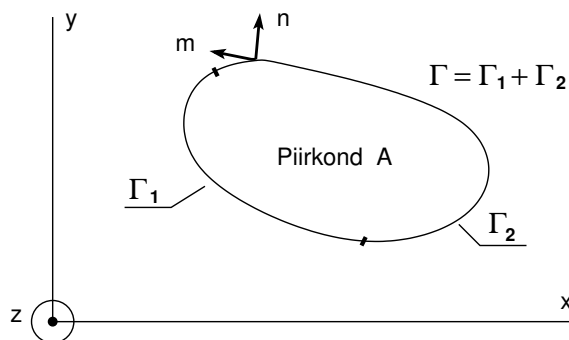
8.2.8 Plaadi rajatingimustest

Kõlblike rajatingimuste kirjeldamine Kirchhoffi plaaditeoorias vajab selgitust. *Kõlblikud rajatingimused* vastavad *jäävusseadustele*. Meelevaldselt kirjutatud rajatingimused võivad viia jäävusseaduste rikkumisele. Jäävusseadusi ja *nõrku lahendeid* on vaadeldud R. Courant [6].

Plaadi servadel Γ_1, Γ_2 (joonis 8.8) võivad olla antud *kinemaatilised* või *staatilis* rajatingimused.

Näiteks olgu toodud nelinurkse plaadi kõigi nelja serva erinevad rajatingimused:

- jäigalt kinnitatud serv
- vabalt toetatud serv
- jõududevaba serv
- plaadi serv on ühendatud elastse talaga selle neutraaljoonel



Joonis 8.8. Plaadi serv

Plaadi serval on kolm kinemaatilist suurust w , θ_n ja θ_m (joonis 8.9). Vastavalt sirgete normaalide hüpoteesile $\theta_n = \frac{dw}{dn}$ ja $\theta_m = \frac{dw}{dm}$. Kui plaadi serval on antud siire w , siis võib selle kirjutada funktsioonina m -ist $w = w(m)$ ning leida ka $\theta_m = \frac{dw}{dm}$. Seega on plaadi serval kaks sõltumatut kinemaatilist suurust w , $\theta_n = \frac{dw}{dn}$.

Plaadi *kinemaatilised* rajatingimused

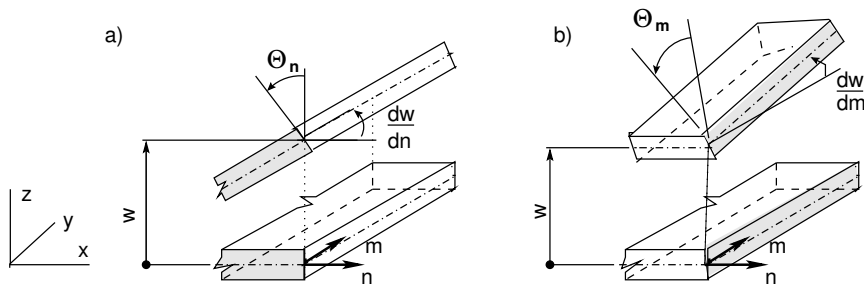
$$w, \quad \frac{dw}{dn} \quad (8.53)$$

on sõltumatud.

Plaadi serval on jõud M_{nn} , M_{nm} ja Q_{nz} . Igale kinemaatilisele rajatingimusele (8.53) peab vastama üks staatiline rajatingimus. Edaspidi näitame, et pöördele $\frac{dw}{dn}$ vastab moment M_{nn} ja siirdele w vastab üldistatud jõud $(Q_{nz} + \frac{dM_{nm}}{dm})$. Seega on Kirchhoffi plaaditeooria *staatilised* rajatingimused

$$Q_{nz} + \frac{dM_{nm}}{dm}, \quad M_{nn} \quad (8.54)$$

Mindlini-Reissneri (Timošenko) tüüpi plaatide teoorias on pöörded ja siirde tuletised sõltumatud, s.t. $\theta_n \neq \frac{dw}{dn}$, $\theta_m \neq \frac{dw}{dm}$. Selles teoorias on kolm kinemaatilist rajatingimust



Joonis 8.9. Siire ja pööre plaadi serval

ja kolm staatilist rajatingimust.

8.2.9 Virtuaalsiirete printsiip. Kõlblikud rajatingimused

Vaatame Kirchhoffi plaaditeoorias virtuaalsiirete printsiipi ja tuletame staatilised rajatingimused (8.54). Virtuaalsiirete printsiip on vajalik lõplike elementide meetodi rakendamiseks plaatidele.

Esitame tasakaaluvõrrandi (8.13) järgmisel kujul:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) + q = 0 \quad (8.55)$$

Korrutame võrrandi (8.55) suvalise kaalufunktsiooniga $\hat{w}$ ja integreerime üle plaadi piirkonna A

$$\begin{aligned} \int_A \hat{w} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right) dA + \int_A \hat{w} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) dA + \int_A \hat{w} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) dA + \\ + \int_A \hat{w} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) dA + \int_A \hat{w} q dA = 0 \end{aligned} \quad (8.56)$$

Ositi integreerimisel kasutame Greeni-Gaussi valemeid

$$\boxed{\int_A \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dA = \oint_{\Gamma} \phi \psi n_x d\Gamma - \int_A \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi dA} \quad (8.57)$$

$$\boxed{\int_A \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} dA = \oint_{\Gamma} \phi \psi n_y d\Gamma - \int_A \frac{\partial \phi}{\partial y} \psi dA} \quad (8.58)$$

Integreerimise tulemusel saame

$$\begin{aligned} \underbrace{\oint_{\Gamma} \hat{w} \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} n_x d\Gamma - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right) dA}_{\text{Greeni-Gaussi valem}} + \underbrace{\oint_{\Gamma} \hat{w} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} n_x d\Gamma - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) dA}_{\text{Greeni-Gaussi valem}} + \\ + \underbrace{\oint_{\Gamma} \hat{w} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} n_y d\Gamma - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) dA}_{\text{Greeni-Gaussi valem}} + \underbrace{\oint_{\Gamma} \hat{w} \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} n_y d\Gamma - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) dA}_{\text{Greeni-Gaussi valem}} + \int_A \hat{w} q dA = 0 \end{aligned} \quad (8.59)$$

Avaldises allajoonitud liikmed võib asendada momentide tasakaaluvõrrandite (8.11) ja (8.12) abil põikjõu avaldistega

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} \hat{w} Q_{xz} n_x d\Gamma + \oint_{\Gamma} \hat{w} Q_{yz} n_x d\Gamma - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right) dA - \\ & - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) dA - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) dA - \\ & - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) dA + \int_A \hat{w} q dA = 0 \end{aligned} \quad (8.60)$$

Kasutades põikjõu avaldist suvalises ristlõikes (8.38), võib avaldise (8.60) esitada järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} & - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} \right) dA - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) dA - \\ & - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) dA - \int_A \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \left(\frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \right) dA + \\ & + \oint_{\Gamma} \hat{w} Q_{nz} d\Gamma + \int_A \hat{w} q dA = 0 \end{aligned} \quad (8.61)$$

Kasutades Greeni-Gaussi valemeid (8.57) ja (8.58), integreerime ositi avaldist (8.61)

$$\begin{aligned} & - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} M_{xx} n_x d\Gamma + \int_A \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} M_{xx} dA - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} M_{xy} n_y d\Gamma + \\ & + \int_A \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y \partial x} M_{xy} dA - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} M_{xy} n_x d\Gamma + \int_A \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x \partial y} M_{xy} dA - \\ & - \oint_{\Gamma} \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} M_{yy} n_y d\Gamma + \int_A \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} M_{yy} dA + \oint_{\Gamma} \hat{w} Q_{nz} d\Gamma + \int_A \hat{w} q dA = 0 \end{aligned} \quad (8.62)$$

Saadud avaldises (8.62) rühmitame liikmed järgmiselt:

$$\begin{aligned} & \int_A \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} M_{xx} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} M_{yy} + 2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y \partial x} M_{xy} \right) dA - \\ & - \oint_{\Gamma} \left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial x} (M_{xx} n_x + M_{xy} n_y) + \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} (M_{xy} n_x + M_{yy} n_y) \right] d\Gamma + \\ & + \oint_{\Gamma} \hat{w} Q_{nz} d\Gamma + \int_A \hat{w} q dA = 0 \end{aligned} \quad (8.63)$$

Kasutades momendivektorit $[\mathbf{M}]$ (8.22) ja diferentseerimisvektorit ∇^* (8.27), kirjutame järgmise avaldise:

$$\left(\nabla^* \right)^T [\mathbf{M}] = \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial x^2} M_{xx} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y^2} M_{yy} + 2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial y \partial x} M_{xy} \quad (8.64)$$

Avaldis (8.52) on lahti kirjutatult

$$\frac{d\hat{w}}{dn}M_{nn} + \frac{d\hat{w}}{dm}M_{nm} = \frac{\partial\hat{w}}{\partial x}(M_{xx}n_x + M_{xy}n_y) + \frac{\partial\hat{w}}{\partial y}(M_{xy}n_x + M_{yy}n_y) \quad (8.65)$$

kus ühikvektor $\mathbf{m}$ on plaadi suvalise serva puutuja sihil.

Kasutades avaldises (8.63) seoseid (8.64) ja (8.65), saame

$$\begin{aligned} \int_A \left(\nabla^* \right)^T [\mathbf{M}] dA &= \oint_{\Gamma} \left(\frac{d\hat{w}}{dn}M_{nn} + \frac{d\hat{w}}{dm}M_{nm} \right) d\Gamma - \\ &\quad - \oint_{\Gamma} \hat{w}Q_{nz}d\Gamma - \int_A \hat{w}q dA \end{aligned} \quad (8.66)$$

Kuna ühikvektor $\mathbf{m}$ on plaadi suvalise serva puutuja sihil, siis võib võtta $d\Gamma = dm$ ja avaldises (8.66) liikme $\oint_{\Gamma} \frac{d\hat{w}}{dm}M_{nm}d\Gamma$ avaldada järgmiselt:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{d\hat{w}}{dm}M_{nm}d\Gamma &= \oint_{\Gamma} \frac{d}{dm}(\hat{w}M_{nm})d\Gamma - \oint_{\Gamma} \hat{w}\frac{dM_{nm}}{dm}d\Gamma = \\ &= \oint_{\Gamma} d(\hat{w}M_{nm}) - \oint_{\Gamma} \hat{w}\frac{dM_{nm}}{dm}d\Gamma = - \oint_{\Gamma} \hat{w}\frac{dM_{nm}}{dm}d\Gamma \end{aligned} \quad (8.67)$$

Asetame saadud seose (8.67) avaldisse (8.66), saame

$$\boxed{\int_A \left(\nabla^* \right)^T [\mathbf{M}] dA = \oint_{\Gamma} \frac{d\hat{w}}{dn}M_{nn}d\Gamma - \oint_{\Gamma} \hat{w} \left(Q_{nz} + \frac{dM_{nm}}{dm} \right) d\Gamma - \int_A \hat{w}q dA} \quad (8.68)$$

Võttes suvalise funktsiooni $\hat{w}$ võrdseks *virtuaalsiirdega* δw ($\hat{w} = \delta w$), väljendab avaldis (8.68) Kirchhoffi plaaditeoorias *virtuaalsiirete printsiipi*. Siin saame ka üldistatud rajajõud $\left(Q_{nz} + \frac{dM_{nm}}{dm} \right)$ ja M_{nn} , mis olid varem välja kirjutatud (8.54).

8.2.10 Koondatud nihkejõud plaadi nurkades

Nihkejõud ühikpikkuse kohta on $\frac{dM_{nm}}{dm}$ plaadi serval, kus võis võtta $d\Gamma = dm$. Integreerime selle nihkejõu ümber plaadi (joonis 8.8)

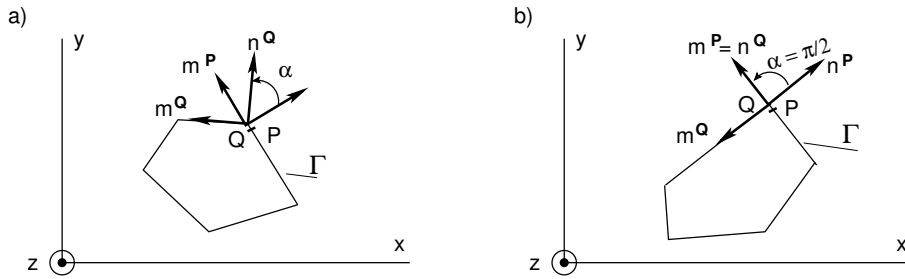
$$\oint_{\Gamma} \frac{dM_{nm}}{dm}d\Gamma = \oint_{\Gamma} \frac{dM_{nm}}{dm}dm = \oint_{\Gamma} dM_{nm} = 0 \quad (8.69)$$

Tasakaalutingimus z -teljele nõuab

$$\oint_{\Gamma} Q_{nz} d\Gamma = \int_A \hat{w} q dA = 0 \quad (8.70)$$

s.t vertikaalne koormus tasakaalustatakse nihkejõudude Q_{nz} poolt.

Kui plaadi servades on nurgad (joonis 8.10), siis nurgas i tekib koondatud nihkejõud Q_*^i . Plaadi serva punktis P (joonis 8.10) on normaalsuunaline ühikvektor $\mathbf{n}^P$ ja puutujasu-



Joonis 8.10. Plaadi nurgad

naline ühikvektor $\mathbf{m}^P$. Teisel pool nurka punktis Q (joonis 8.10) on normaalsuunaline ühikvektor $\mathbf{n}^Q$ ja puutujasuunaline ühikvektor $\mathbf{m}^Q$. Plaadi serva teravat nurka iseloomustatakse normaalide $\mathbf{n}^P$ ja $\mathbf{n}^Q$ vahelise nurga α abil.

Vaatleme plaadi virtuaalsiirete printsibis (8.68) täiendavat põikjõudu teravast nurgast

$$\int_P^Q \frac{dM_{nm}}{dm} d\Gamma = \int_P^Q dM_{nm} = M_{nm}^Q - M_{nm}^P \quad (8.71)$$

Plaadi täpne siirdefunktsioon w on pidev funktsioon koos oma tuletistega. Kuna punktid P ja Q asuvad teineteisele lõpmata lähedal, siis

$$M_{xx}^P = M_{xx}^Q = M_{xx} \quad , \quad M_{yy}^P = M_{yy}^Q = M_{yy} \quad , \quad M_{xy}^P = M_{xy}^Q = M_{xy} \quad (8.72)$$

Arvestades avaldist (8.72) ja (8.38), saame

$$\begin{aligned} M_{nm}^Q &= n_x^Q m_x^Q M_{xx} + n_y^Q m_y^Q M_{yy} + (n_y^Q m_x^Q + n_x^Q m_y^Q) M_{xy} \\ M_{nm}^P &= n_x^P m_x^P M_{xx} + n_y^P m_y^P M_{yy} + (n_y^P m_x^P + n_x^P m_y^P) M_{xy} \end{aligned} \quad (8.73)$$

Asetades saadud avaldised (8.73) avaldisse (8.71), saame

$$\begin{aligned}
\int_P^Q \frac{dM_{nm}}{dm} d\Gamma &= M_{nm}^Q - M_{nm}^P = Q_* = \\
&= (n_x^Q m_x^Q - n_x^P m_x^P) M_{xx} + (n_y^Q m_y^Q - n_y^P m_y^P) M_{yy} + \\
&\quad + (n_y^Q m_x^Q - n_y^P m_x^P + n_x^Q m_y^Q - n_x^P m_y^P) M_{xy}
\end{aligned} \tag{8.74}$$

Ristkülikuline plaat

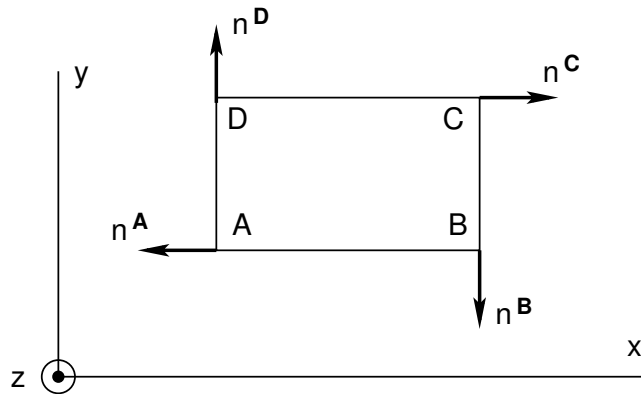
Vaatleme plaati, mille üks servanurk $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (joonis 8.10 b). Ühikvektorid on järgmised:

$$\mathbf{n}^P = \begin{bmatrix} n_x^P \\ n_y^P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}^P = \mathbf{n}^Q = \begin{bmatrix} -n_y^P \\ n_x^P \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}^Q = \begin{bmatrix} -n_x^P \\ n_y^P \end{bmatrix} \tag{8.75}$$

Avaldisest (8.74) saab

$$Q_* = M_{nm}^Q - M_{nm}^P = 2n_x^P n_y^P (M_{xx} - M_{yy}) + 2 \left[(n_y^P)^2 - (n_x^P)^2 \right] M_{xy} \tag{8.76}$$

Ristkülikukujulise plaadi (joonis 8.11) nurga C puhul on $(\mathbf{n}^P)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, mis annab



Joonis 8.11. Täiendav põikjõud plaadi nurkades

$Q_*^C = -2M_{xy}^C$. Nii leiame täiendava põikjõu ka teistes nurkades

$$Q_*^A = -2M_{xy}^A, \quad Q_*^B = 2M_{xy}^B, \quad Q_*^C = -2M_{xy}^C, \quad Q_*^D = 2M_{xy}^D \tag{8.77}$$

8.3 Plaadi lõplikud elemendid

Plaadi siirded $w(x, y)$ interpoleerime sõlmpunktide siirete $\mathbf{d}$ ja kujufunktsioonide $\mathbf{N}$ abil

$$w(x, y) = [\mathbf{N}] [\mathbf{d}] \quad (8.78)$$

kus

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (8.79)$$

siin on d_n siire ja pöörded sõlmpunktis $[\mathbf{n}]$.

Diferentseerime siiret $w(x, y)$ diferentseerimisvektori ∇^* abil

$$\left[\nabla^* \right] w = [\mathbf{B}] [\mathbf{d}], \quad kus \quad [\mathbf{B}] = \left[\nabla^* \right] [\mathbf{N}] \quad (8.80)$$

siin

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_n}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial^2 N_n}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & \dots & 2 \frac{\partial^2 N_n}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (8.81)$$

Avaldises (8.68) interpoleerime suvalise funktsiooni $\hat{w}$ sõlmpunktide parameetrite $\hat{\mathbf{d}}$ ja kujufunktsioonide $\mathbf{N}$ abil

$$\hat{w}(x, y) = [\mathbf{N}] [\hat{\mathbf{d}}] \quad (8.82)$$

Kuna $\hat{w}$ on suvaline, siis on ka parameetrid $[\hat{\mathbf{d}}]$ suvalised

$$\left[\nabla^* \right] \hat{w} = [\mathbf{B}] [\hat{\mathbf{d}}] \quad (8.83)$$

Funktsiooni $\hat{w}$ tuletis normaali n järgi

$$\frac{d\hat{w}}{dn} = (\nabla \hat{w})^T [\mathbf{n}] = [\hat{\mathbf{d}}^T] (\nabla \mathbf{N})^T [\mathbf{n}] \quad (8.84)$$

kus

$$\nabla \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8.85)$$

Suvalise kaalufunktsiooni $\hat{w}$ võib esitada kujul

$$\hat{w} = [\hat{\mathbf{d}}^T] \mathbf{N}^T \quad (8.86)$$

Virtuaalsiirete avaldis (8.68) on nüüd

$$\begin{aligned} & [\hat{\mathbf{d}}^T] \left[\int_A [\mathbf{B}^T] [\mathbf{M}] dA - \oint_{\Gamma} (\nabla \mathbf{N})^T [\mathbf{n}] M_{nn} d\Gamma + \right. \\ & \left. + \oint_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left(Q_{nz} + \frac{dM_{nm}}{dm} \right) d\Gamma + \int_A \mathbf{N}^T q dA \right] = 0 \end{aligned} \quad (8.87)$$

Kuna $\hat{\mathbf{d}}^T$ on suvaline, siis jätame ta ära

$$\begin{aligned} & \int_A [\mathbf{B}^T] [\mathbf{M}] dA = \oint_{\Gamma} (\nabla \mathbf{N})^T [\mathbf{n}] M_{nn} d\Gamma - \\ & - \oint_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left(Q_{nz} + \frac{dM_{nm}}{dm} \right) d\Gamma - \int_A \mathbf{N}^T q dA \end{aligned} \quad (8.88)$$

Avaldame $[\mathbf{M}]$ (vt avaldise (8.29) ja (8.80))

$$[\mathbf{M}] = - [\tilde{\mathbf{D}}] [\mathbf{B}] [\mathbf{d}] \quad (8.89)$$

Asetame tulemuse avaldisse (8.88)

$$\begin{aligned} & \left(\int_A [\mathbf{B}^T] [\tilde{\mathbf{D}}] [\mathbf{B}] dA \right) [\mathbf{d}] = \oint_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left(Q_{nz} + \frac{dM_{nm}}{dm} \right) d\Gamma - \\ & - \oint_{\Gamma} (\nabla \mathbf{N})^T [\mathbf{n}] M_{nn} d\Gamma + \int_A \mathbf{N}^T q dA \end{aligned} \quad (8.90)$$

ehk lühemalt

$$[\mathbf{K}] [\mathbf{d}] = [\mathbf{f}] \quad , \quad [\mathbf{f}] = [\mathbf{f}_b] + [\mathbf{f}_l] \quad (8.91)$$

kus

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}] &= \int_A [\mathbf{B}^T] [\tilde{\mathbf{D}}] [\mathbf{B}] dA \\
[\mathbf{f}_b] &= \oint_{\Gamma} \mathbf{N}^T \left(Q_{nz} + \frac{dM_{nm}}{dm} \right) d\Gamma - \oint_{\Gamma} (\nabla \mathbf{N})^T [\mathbf{n}] M_{nn} d\Gamma \\
[\mathbf{f}_l] &= \int_A \mathbf{N}^T q dA
\end{aligned} \tag{8.92}$$

Sõltuvalt plaadi serva kinnitusest (joonis 8.12) on rajatingimused (8.53), (8.54) järgmised:

- jäigalt kinnitatud serv

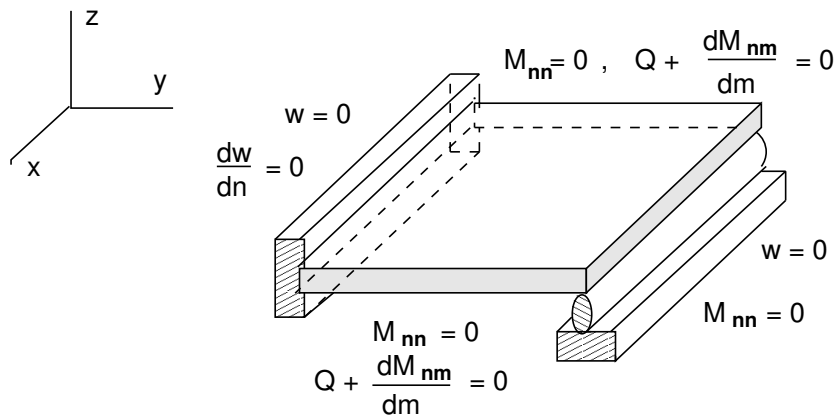
$$w = 0 \quad , \quad \frac{dw}{dn} = 0 \tag{8.93}$$

- vabalt toetatud serv

$$w = 0 \quad , \quad M_{nn} = 0 \tag{8.94}$$

- jõududevaba serv

$$M_{nn} = 0 \quad , \quad Q_{nz} + \frac{dM_{nm}}{dm} = 0 \tag{8.95}$$



Joonis 8.12. Plaadi rajatingimusi

8.3.1 Täielikkuse ja kooskõlalise nõuded

Plaadi siirde w lähendasime kujufunktsioonide abil N (8.78). Millised peavad olema kujufunktsioonid N_i ? Millised suurused valida sõlmede parameetriteks d_i ? Selleks et nendele küsimustele vastata, tutvume *täielikkuse* ja *kooskõlalise* nõuetega [16]. Lõpmatult väikese plaadi elemendi siiret piirprotsessis iseloomustab jäiga keha siire ja konstantne kõverus. Kõverust kirjeldab kõverusvektor (kõverusmaatriks) $\mathbf{k}$ (8.18).

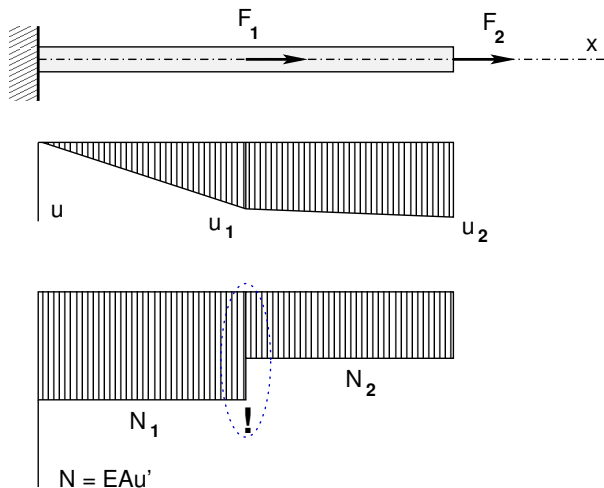
Täielikkus:

- siirde w lähendamine peab sisaldama jäiga keha liikumisi
- siirde w lähendamine peab võimaldama konstantset kõverust

Jäiga keha liikumine koosneb siirdest z -telje suunas ja pööretest ümber x - ja y -telje. Siit teeme järelduse, et siirde w lähendamiseks peab polünoom sisaldama liikmeid $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$. Konstantse kõveruse tingimus nõuab, et siirde w lähendamiseks peab polünoom sisaldama vähemalt järgmisi liikmeid:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \text{ja teised liikmed} \quad (8.96)$$

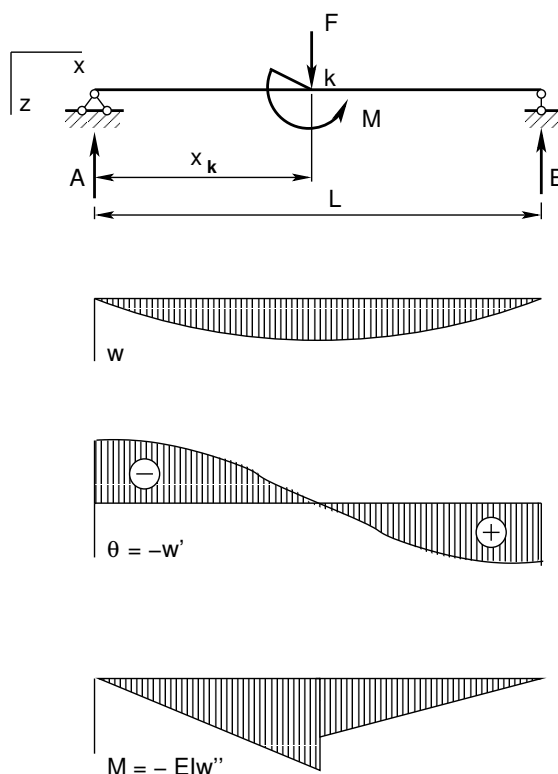
Plaadi kooskõlalise nõude juures on vajalik C^1 -pidevus. Järgnevalt selgitame C^0 -pidevuse mõistet. Vaatleme joonist 8.13, kus pikkele töötava varda siirded on tähistatud



Joonis 8.13. C^0 -pidevus

u -ga ja varda sisejõud N -iga. Varda sisejõud N avaldub siirde esimese tuletise kaudu $N = EAu'$. Funktsioon $u(x)$ on pidev, kuid tema esimene tuletis on katkev. Siin räägitakse, et funktsioon on C^0 -pidev.

C^1 -pidevuse mõiste selgitamiseks vaatleme joonist 8.14, kus lihttalale mõjub koormus F ja koondatud moment M . Momendi epüüris on katkevus, mis on võrdne rakendatud momendiga M . Tala siire on w ja tala ristlõike pöördenurk θ ($\theta = -w'$) on võrdne siirde tuletisega, kuid vastupidise märgiga. Mõlemad on pidevad funktsioonid. Tala sisejõud

Joonis 8.14. C^1 -pidevus

M_y ($M_y = -EIw''$) on võrdeline siirde w teise tuletisega, kuid vastupidise märgiga. Funktsioon $w(x)$ ja tema esimene tuletis w' on pidev, kuid teine tuletis katkev. Siin räägitakse, et funktsioon on C^1 -pidev.

C^n -pidevus tähendab, et tema esimesed n tuletist on pidevad.

Plaadi elementidele kehtib C^1 -pidevuse nõue. Siin jõuame kooskõlalisuse nõude juurde.

Kooskõlalisuse nõue:

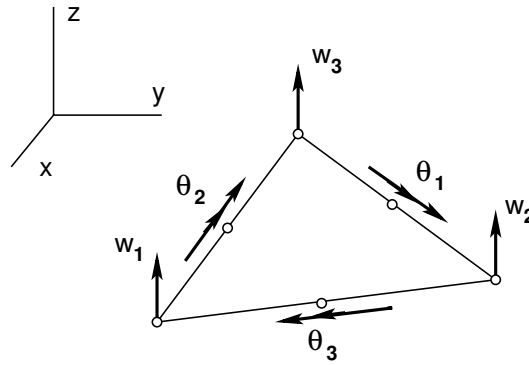
- plaadi siirde w aproksimatsioon ja kaldenurk üle plaadi serva peavad olema pidevad

Kui täiuslikkuse nõue on täidetud, saab pehmeneda kooskõlalisuse nõuet ja koostada *mittekooskõlaline plaadi element*. Lihtsate polünoomidega aproksimeerides ei ole võimalik koostada kooskõlalist plaadi elementi [25]. Enamik kasutatavaid plaadi elemente on mittekooskõlalised.

8.3.2 Lihtsad mittekooskõlalised elemendid

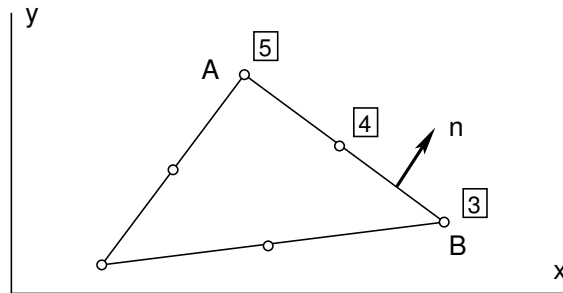
Vaatleme 6 vabadusastmega kolmnurkset plaadi elementi (joonis 8.15). Vaadeldaval elemendil on 3 siiret w_i nurgapunktides ja kolm pööret θ_i plaadi külgedel. Aproksimatsiooniks (lähendamiseks) kasutame järgmist polünoomi:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \quad (8.97)$$



Joonis 8.15. Lihtsaim plaadi element

See on väikseim polünoom, mida kasutatakse plaadi elemendi siirde lähendamiseks. Siirde teised tuletised on konstandid, millega on täidetud konstantse kõveruse nõue. Järgnevalt näitame, et element on mittekooskõlaline. Vaatleme elemendi suvalist külge AB (joonis 8.16). Siirde w normaali $\mathbf{n}$ suunaline tuletis (8.84)



Joonis 8.16. Kolmnurkne 6 vabadusastmega element

$$\frac{dw}{dn} = (\nabla \hat{w})^T [\mathbf{n}] = (\alpha_2 + 2\alpha_4x + \alpha_5y) n_x + (\alpha_3 + \alpha_5x + 2\alpha_6y) n_y \quad (8.98)$$

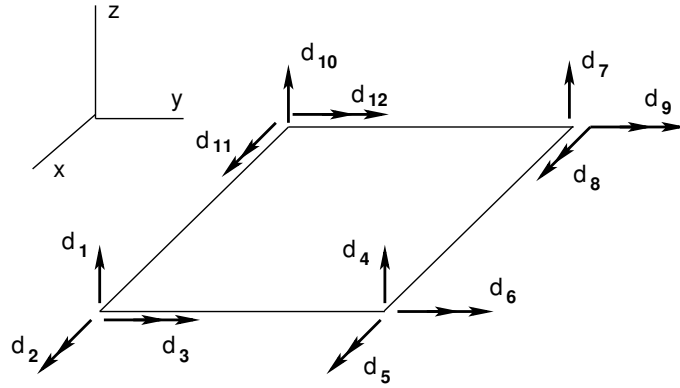
Plaadi serval AB on joone võrrand $y = \beta_1x + \beta_2$. Võttes selle arvesse, saab avaldis (8.97) järgmise kuju:

$$w = A_1 + A_2x + A_3x^2 \quad (8.99)$$

ning

$$\frac{dw}{dn} = B_1 + B_2x \quad (8.100)$$

Avaldises (8.99) ja (8.100) on viis konstanti A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 . Nende määramiseks on plaadi serval AB teada kolm suurust w_3, w_5 ja θ_1 . Seega ei saa neid viit suurust üheselt määrata. Siit teeme järelduse, et üldiselt on w ja $\frac{dw}{dn}$ muutus plaadi serval katkev (mitte pidev) ja vaadeldud element mittekooskõlaline.



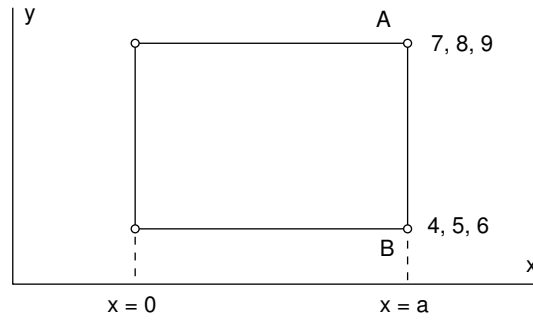
Joonis 8.17. Nelinurkne 12 vabadusastmega element

Nelinurksetest plaadi elementidest lihtsaim on 12 vabadusastmega element (joonis 8.17).

Siin on sõlmpunktide $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ siirded w_i tähistatud d_1, d_4, d_7, d_{10} ja sõlmpunktide pöörded θ_{xi}, θ_{yi} vastavalt $d_2, d_3, d_5, d_6, d_8, d_9, d_{11}, d_{12}$. Plaadi siiret lähendame järgmise polünoomiga:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (8.101)$$

Avaldis (8.101) lähendab lineaarset momentide muutust elemendi sees. Vaadeldav element on siiski mittekooskõlaline. Vaatleme plaadi serva AB (joonis 8.18). Plaadi serval



Joonis 8.18. Nelinurkne mittekooskõlaline element

AB , kus $x = a$, saame avaldisest (8.101)

$$w = A_1 + A_2 y + A_3 y^2 + A_4 x^3 \quad (8.102)$$

$$\frac{dw}{dy} = A_2 + 2A_3 y + 3A_4 x^2 \quad (8.103)$$

kus A_1, A_2, A_3, A_4 on konstandid. Siire w ja kalle $\frac{dw}{dy}$ on teada punktides A ja B . Siin saame need konstandid üheselt määrata.

Serval AB ei õnnestu pööret $\frac{dw}{dx}$ üheselt määrata. Avaldisest (8.101) saame

$$\frac{dw}{dx} = B_1 + B_2y + B_3y^2 + B_4x^3 \quad (8.104)$$

kus konstantide B_1, B_2, B_3, B_4 määramiseks on punktides A ja B teada $\frac{dw}{dx}$ suurus. Nelja suuruse B_1, B_2, B_3, B_4 määramiseks on kaks avaldist. Nii ei ole neid konstante võimalik üheselt määrata. Vaadeldav element on mittekooskõlaline.

Kui Kirchhoffi plaaditeoorias on plaadi elementidele C^1 -pidevuse nõue, siis Mindlini-Reissneri plaaditeoorias on plaadi elementidele C^0 -pidevuse nõue.

Peatükk 9

Lõplike elementide tarkvara

9.1 Arvutiprogrammide kasutamine

Arvutiprogrammide kasutamine eeldab järgmiste valdkondade [15] tundmist:

- lõplike elementide teooria alused
- inseneriülesannete matemaatiline modelleerimine ja sõnastamine
- numbrilised algoritmid (võrrandisüsteemide lahendamine, omaväärtuste leidmine)
- tarkvara tööriistad (andmebaaside juhtimine, programmeerimiskeeled, struktuurprogrammeerimise alused)

9.2 Arvutiprogrammide täpsusest

Lõplike elementide kommertsprogrammidele esitatavatest nõuetest [14] võib nimetada näiteks inglise NAFEMS-i (*National Agency for Finite Element Methods and Standards*) nõudeid.

Mittekooskõlaliste elementide täpsuse kadumise peamiseks põhjuseks on ergutusmehhanism, mida tuntakse ka *astaku puudujäägina*. See avaldub erilistel koormamise juhtudel või elemendi erilise geomeetria puhul ülemäärase jäikusena, mida nimetatakse ka *lukustuseks*. Lõplike elementide testimisel peab arvestama

- elemendi erinevaid koormusi
- elemendi geomeetriat
- materjali omadusi

Elemendi geomeetriliste häirete allikatest võib nimetada suurt külgede erinevust (joonis ??), elemendi kallet, elemendi teravnemist, elemendi kiivet.

Lisa A

Variatsiooniprintsiibid

A.1 Variatsioon ja selle omadused

Variatsiooniprintsiipides, näiteks virtuaalsiirete printsiibis, potentsiaalse energia miinimumi printsiibis jt, tuleb leida *funktsionaali* miinimum või maksimum. Funktsionaali maksimumi või miinimumi leidmine sarnaneb *funktsiooni* maksimumi ja miinimumi leidmisega, sellepärast vaatleme neid kõrvuti.

Funktsioon

1. Muutuvat suurust z nimetatakse muutuja x funktsiooniks, mida tähistatakse

$$z = f(x)$$

Igale x väärtusele (x muutumispiirkonnas) vastab väärtus z , s.t igale arvule x vastab arv z .

2. Funktsiooni $f(x)$ argumenti Δx juurdekasvuks nimetatakse vahet

$$\Delta x = x - x_j$$

Kui x on sõltumatu muutuja, siis

$$dx = \Delta x$$

Funktsionaal

1. Muutuvat suurust v nimetatakse funktsionaaliks, mis sõltub funktsioonist $y(x)$, mida tähistatakse

$$v = v[y(x)]$$

Igale funktsioonile $y(x)$ (funktsioonide $y(x)$ klassist) vastab väärtus v , s.t igale funktsioonile $y(x)$ vastab arv v .

2. Funktsionaali $v[y(x)]$ argumenti (funktsiooni $f(x)$) juurdekasvuks ehk variatsiooniks nimetatakse kahe funktsiooni vahet

$$\delta y = y(x) - y_1(x)$$

3. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse pidevaks, kui väikesele x muutusele vastab funktsiooni $f(x)$ väike muutus.

3. Funktsionaali $v[y(x)]$ nimetatakse pidevaks, kui väikesele $y(x)$ muutusele vastab funktsionaali $v[y(x)]$ väike muutus.

4. Funktsiooni juurdekasv Δf

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

4. Funktsionaali juurdekasv Δv

$$\Delta v = v[y(x) + \delta y(x)] - v[y(x)]$$

5. Funktsiooni $f(x)$ diferentsiaal on

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x + \alpha \Delta x) \big|_{\alpha=0}$$

5. Funktsionaali $v[y(x)]$ variatsioon on

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v[(y) + \alpha \delta y(x)] \big|_{\alpha=0}$$

6. Kui diferentseeritav funktsioon omab maksimumi või miinimumi punktis $x = x_0$, siis selles punktis

$$df = 0$$

6. Kui funktsionaal $v[(y)]$ on varieeritav ja omab maksimumi või miinimumi funktsiooni $y = y_0(x)$ puhul, siis

$$\delta v = 0$$

Täpsemaid definitsioone vaata näiteks Elsgoltsi raamatust [8] lk 284.

A.2 Euleri võrrand

Funktsionaali

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (\text{A.1})$$

ekstreemumi vajalik tingimus on

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx = 0 \quad (\text{A.2})$$

kus avaldise (A.2) esimene kordaja $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}$ annab ekstreemumi, teine kordaja δy on suvaline funktsioon, mis rajal muutub nulliks.

Funktsionaali

$$v[z(x, y)] = \int_A F \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (\text{A.3})$$

ekstreemumi annab võrrand

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} \{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y} \{F_q\} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{F_r\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial x} \{F_s\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{F_t\} = 0 \quad (\text{A.4})$$

kus

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (\text{A.5})$$

Näiteks

funktsioon z , mis annab funktsionaalile

$$v[z(x, y)] = \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (\text{A.6})$$

ekstreemumi, peab rahuldama *biharmonilist* võrrandit

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = 0 \quad (\text{A.7})$$

mida lühendatult kirjutatakse $\Delta \Delta z = 0$.

A.3 Variatsiooniprintsiibid

Potentsiaalse energia miinimumi printsiip

Konstruksiooni potentsiaalne energia $\Pi(u)$ on võrdne jõudude tööga, kuid vastupidise märgiga. Aktiivne sisejõudude töö $W_s^{(a)}$ vastupidise märgiga on sisejõudude potentsiaalne energia Π_s ehk teise nimega deformatsioonienergia U

$$\begin{aligned} U &= \Pi_s = -W_s^{(a)} \\ \Pi_v &= -W_v \\ \Pi_r &= -W_r \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Siin on W_v ja W_r välisjõudude ja rajajõudude töö. Kogu potentsiaalne energia $\Pi(u)$ on võrdne sisejõudude

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= U - W_v - W_r = \\ &= \frac{1}{2} \int_{x_a, x_b} \epsilon^T \mathbf{E} \epsilon dx - \int_{x_a, x_b} \mathbf{u}^T \mathbf{q} dA - [\mathbf{r}^T \mathbf{t}]_{x_r} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

välisjõudude ja rajajõudude potentsiaalsete energiatega summaga.

Kõigi lubatavate deformatsiooniolukordade $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\epsilon}, \hat{\mathbf{r}}\}$ puhul võtab lineaarne elastne konstruktsioon deformatsiooniolukorra $\{\mathbf{u}, \epsilon, \mathbf{r}\}$, mille puhul kogu potentsiaalne energia $\Pi(u)$ on minimaalne

$$\min \Pi(u) \quad , \quad \delta \Pi(u) = 0 \quad \text{ja} \quad \delta^2 \Pi(u) > 0 \quad (\text{A.10})$$

Avaldis (A.9) on toodud varrassüsteemidele. Kolmemõõtmelisel juhul esitame kogu potentsiaali järgmisel kujul:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{B}\mathbf{u})^T \mathbf{E} (\mathbf{B}\mathbf{u}) dV - \mathbf{P}(u) \quad (\text{A.11})$$

kus

$$\mathbf{P}(u) = \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{p} dV + \int_{\partial V_t} \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} dA \quad (\text{A.12})$$

ja kõrvaltingimused

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \text{rajal} \quad \partial V_u \quad (\text{A.13})$$

Vaadeldes potentsiaalset energiat kui pingete funktsionaali $\Pi(\sigma)$, räägime *potentsiaalsest täiendenergiast*. Potentsiaalse täiendenergia miinimumi printsiip

$$\Pi(\sigma) = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \mathbf{E}^{-1} \sigma dV - \int_{\partial V_u} (\sigma \mathbf{n})^T \hat{\mathbf{u}} dA \quad (\text{A.14})$$

kõrvaltingimusega

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \sigma + \hat{\mathbf{p}} &= 0 \\ \sigma \mathbf{n} &= \hat{\mathbf{T}} \quad \text{rajal} \quad \partial V_t \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Hellingeri-Reissneri printsiip

Lülitades funktsionaali (A.14) kõrvaltingimused (A.15) kui Lagrange'i kordajad, saame Hellingeri-Reissneri printsiibi [17]

$$\Pi(\sigma, u) = -\frac{1}{2} \int_V \sigma^T \mathbf{E}^{-1} \sigma + \sigma^T \mathbf{B}\mathbf{u} dV - \mathbf{P}(u) - \int_{\partial V_u} (\sigma \mathbf{n})^T (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) dA \quad (\text{A.16})$$

mille lahendi jaoks on tingimus

$$\Pi(\tau, u) \leq \Pi(\sigma, u) \leq \Pi(\sigma, v) \quad (\text{A.17})$$

Avaldises (A.16) on kindla $\mathbf{u}$ puhul σ juures maksimum ja kindla σ puhul on $\mathbf{u}$ juures miinimum.

Hu-Washizu printsiip

Hu-Washizu printsiip [17]

$$\int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon^T \mathbf{E} \epsilon - \sigma^T \epsilon - \sigma^T \mathbf{B}\mathbf{u} \right) dV - W_r - W_v \quad (\text{A.18})$$

Felippa printsiip

Felippa [9] üldistas variatsiooniprintsiibid järgmise avaldisega:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon^T & \sigma^T & \mathbf{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{E} & a_{12}\mathbf{I} & a_{13}\mathbf{EB} \\ a_{12}\mathbf{I} & a_{22}\mathbf{E}^{-1} & a_{23}\mathbf{B} \\ a_{13}\mathbf{B}^T\mathbf{E} & a_{23}\mathbf{B}^T & a_{33}\mathbf{B}^T\mathbf{EB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \sigma \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \right\} dV \quad (\text{A.19})$$

Selleks et Euleri võrrand annaks korrektsed tulemused, peavad koefitsiendid a_{ij} rahuldama järgmisi tingimusi:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} &= 0 \\ a_{12} + a_{22} + a_{23} &= 0 \\ a_{13} + a_{23} + a_{22} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Hellingeri-Reissneri printsiibi puhul $a_{22} = -1$, $a_{33} = 1$ ja kõik teised koefitsiendid $a_{ij} = 0$.

Hu-Washizu printsiibi saame, kui võtame järgmised a_{ij} väärtused:

$$a_{11} = 1 \quad , \quad a_{12} = -1 \quad , \quad a_{23} = 1 \quad , \quad a_{13} = a_{22} = a_{22} = 0 \quad (\text{A.21})$$

Lisa B

Koorikud

B.1 Koorikute diferentsiaalvõrrandid

Professor L.Ainola [1] poolt välja toodud koorikute diferentsiaalvõrrandid.
Liikumisvõrrandid

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha t^{\alpha\beta} - b_\alpha^\beta - h\Theta^{\beta\bullet} + p^\beta &= 0 \\ \nabla_\alpha k^\alpha + b_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta} - h\Lambda^\bullet + p &= 0 \\ \nabla_\alpha m^{\alpha\beta} - q^\beta - k^* b_\alpha^\beta l^\alpha - \frac{h^3}{12} A^{\beta\bullet} + m^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

kus

$$\begin{aligned} t^{\alpha\beta} &= T^{\alpha\beta} (\delta_\gamma^\beta + \eta_{\gamma\cdot}^\beta) + N^\alpha \iota^\beta + M^{\alpha\gamma} \kappa_{\gamma\cdot}^\beta \\ m^{\alpha\beta} &= M^{\alpha\gamma} (\delta_\gamma^\beta + \eta_{\gamma\cdot}^\beta) \\ k^\alpha &= N^\alpha + T^{\alpha\beta} \omega_\beta + M^{\alpha\beta} \mu_\beta \\ k^* l^\alpha &= M^{\alpha\beta} \omega_\beta \\ q^\alpha &= N^\beta (\delta_\beta^\alpha + \eta_{\beta\cdot}^\alpha) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Elastsusseosed

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= hE_1^{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_{\gamma\delta} \\ M^{\alpha\beta} &= \frac{h^3}{12} E_1^{\alpha\beta\gamma\delta} \xi_{\gamma\delta} \\ N^\alpha &= 2h\mu\theta^\alpha, \quad \Theta_\alpha = \varrho\theta_\alpha, \quad \Lambda = \varrho\beta, \quad A_\gamma = \alpha_\gamma \\ E_1^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{E}{1-\nu^2} (a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + \nu c^{\alpha\gamma} c^{\beta\delta}) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

ja kinemaatilised seosed

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\eta_{\alpha\beta} + \eta_{\beta\alpha} + \eta_{\alpha\cdot}^\gamma \eta_{\beta\gamma} + \omega_\alpha \omega_\beta)$$

$$\begin{aligned}
\xi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\beta\alpha} + \eta_{\alpha}^{\gamma} \kappa_{\beta\gamma} + \eta_{\beta}^{\gamma} \kappa_{\alpha\gamma} + \omega_{\alpha} \mu_{\beta} + \omega_{\beta} \mu_{\alpha} \right) \\
k\theta_{\alpha} &= \frac{1}{2} \left(\omega_{\alpha} + \iota_{\alpha} + \eta_{\alpha}^{\beta} \iota_{\beta} \right) \\
\Theta_{\alpha} &= v_{\alpha}^{\bullet}, \quad \beta = w^{\bullet}, \quad \alpha_{\gamma} = \varphi_{\gamma}^{\bullet}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

kus

$$\begin{aligned}
\eta_{\alpha\beta} &= \nabla_{\alpha} v_{\beta} - b_{\alpha\beta}, & \kappa_{\alpha\beta} &= \nabla_{\alpha} \varphi_{\beta} \\
\omega_{\alpha} &= \nabla_{\alpha} w + b_{\alpha\beta} v^{\beta} \\
\mu_{\alpha} &= b_{\alpha\beta} \varphi^{\beta}, & \iota_{\alpha} &= \varphi_{\alpha}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Siin on analoogia mittelineaarse elastsusteooriga.

Esitame võrrandid (B.2) – (B.6) ristkoordinaatides, kus koordinaatjooned ühtuvad peakõverusjoontega.

Olgu α, β – koordinaadid; A, B – Lamé parameetrid; R_1, R_2 – kõverusraadiused, siis

$$\begin{aligned}
a_{11} &= A^2, & a_{22} &= B^2, & a_{12} &= 0 \\
a^{11} &= \frac{1}{A^2}, & a^{22} &= \frac{1}{B^2}, & a^{12} &= 0 \\
b_{11} &= -\frac{A^2}{R_1}, & b_{22} &= -\frac{B^2}{R_1}, & b_{12} &= 0 \\
b^{11} &= -\frac{1}{A^2 R_1}, & b^{22} &= -\frac{1}{B^2 R_2}, & b^{12} &= 0
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Kristoffelid

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \alpha}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta}, & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{B}{A^2} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \beta}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha}, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{A}{B^2} \frac{\partial A}{\partial \beta}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Füüsikalised vektorite ja tensorite komponendid ($A_1 = A, A_2 = B$)

$$\begin{aligned}
U_{(i)} &= \frac{1}{A_i} U_i = A_i U^i \\
K_{(ij)} &= \frac{1}{A_i A_j} K_{ij} = A_i A_j K^{ij}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Kovariantsed tuletised

$$\begin{aligned}
\nabla_j U_i &= \frac{\partial U_i}{\partial \alpha^j} - \Gamma_{ij}^{\beta} U_{\beta} \quad (\alpha^1 = \alpha, \quad \alpha^2 = \beta) \\
\nabla_s K^{ij} &= \frac{\partial K^{ij}}{\partial \alpha^s} + \Gamma_{s\beta}^i K^{\beta j} + \Gamma_{s\beta}^j K^{i\beta}
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Kasutades avaldisi (B.6) – (B.9), saame võrrandid (B.2) – (B.6) avaldada järgmisel kujul

$$\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial B t_{(11)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial A t_{(21)}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} t_{(12)} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} t_{(22)} \right] + \frac{k_{(1)}}{R_1} - h \Theta_{(1)}^{\bullet} + p_{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial B t_{(12)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial A t_{(22)}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \alpha} t_{(21)} - \frac{\partial A}{\partial \beta} t_{(11)} \right] + \frac{k_{(2)}}{R_2} - h \Theta_{(2)}^\bullet + p_{(2)} &= 0 \\
\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial B k_{(1)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial A k_{(2)}}{\partial \beta} \right] - \frac{t_{(11)}}{R_1} - \frac{t_{(22)}}{R_2} - h \Lambda^\bullet + p &= 0 \\
\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial B m_{(11)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial A m_{(21)}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} m_{(12)} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} m_{(22)} \right] - q_{(1)} - k^* \frac{1}{R_1} l_{(1)} - \\
&\quad - \frac{h^3}{12} A_{(1)}^\bullet + m_{(1)} = 0 \\
\frac{1}{AB} \left[\frac{\partial B m_{(12)}}{\partial \alpha} + \frac{\partial A m_{(22)}}{\partial \beta} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} m_{(21)} - \frac{\partial A}{\partial \beta} m_{(11)} \right] - q_{(2)} - k^* \frac{1}{R_2} l_{(2)} - \\
&\quad - \frac{h^3}{12} A_{(2)}^\bullet + m_{(2)} = 0
\end{aligned} \tag{B.10}$$

kus

$$\begin{aligned}
t_{(11)} &= T_{(11)} + T_{(11)} \eta_{(11)} + T_{(12)} \eta_{(21)} + N_{(1)} \iota_{(1)} + M_{(11)} \kappa_{(11)} + M_{(12)} \kappa_{(21)} \\
t_{(12)} &= T_{(12)} + T_{(11)} \eta_{(12)} + T_{(12)} \eta_{(22)} + N_{(1)} \iota_{(2)} + M_{(11)} \kappa_{(12)} + M_{(12)} \kappa_{(22)} \\
t_{(21)} &= T_{(21)} + T_{(21)} \eta_{(11)} + T_{(22)} \eta_{(21)} + N_{(2)} \iota_{(1)} + M_{(21)} \kappa_{(11)} + M_{(22)} \kappa_{(21)} \\
t_{(22)} &= T_{(22)} + T_{(22)} \eta_{(11)} + T_{(22)} \eta_{(22)} + N_{(2)} \iota_{(2)} + M_{(21)} \kappa_{(12)} + M_{(22)} \kappa_{(22)}
\end{aligned} \tag{B.11}$$

ja momendi avaldised

$$\begin{aligned}
m_{(11)} &= M_{(11)} + M_{(11)} \eta_{(11)} + M_{(12)} \eta_{(21)} \\
m_{(12)} &= M_{(12)} + M_{(11)} \eta_{(12)} + M_{(12)} \eta_{(22)} \\
m_{(21)} &= M_{(21)} + M_{(21)} \eta_{(11)} + M_{(22)} \eta_{(21)} \\
m_{(22)} &= M_{(22)} + M_{(22)} \eta_{(11)} + M_{(22)} \eta_{(22)}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

ning põikjõu avaldised

$$\begin{aligned}
k_{(1)} &= N_{(1)} + T_{(11)} \omega_{(1)} + T_{(12)} \omega_{(2)} + M_{(11)} \mu_{(1)} + M_{(12)} \mu_{(2)} \\
k_{(2)} &= N_{(2)} + T_{(21)} \omega_{(1)} + T_{(22)} \omega_{(2)} + M_{(21)} \mu_{(1)} + M_{(22)} \mu_{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k^* l_{(1)} &= M_{(11)} \omega_{(1)} + M_{(12)} \omega_{(2)} \\
k^* l_{(2)} &= M_{(21)} \omega_{(1)} + M_{(22)} \omega_{(2)}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
q_{(1)} &= N_{(1)} + N_{(1)} \eta_{(11)} + N_{(2)} \eta_{(21)} \\
q_{(2)} &= N_{(2)} + N_{(1)} \eta_{(12)} + N_{(2)} \eta_{(22)}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Lineaarsed jõu avaldised

$$\begin{aligned}
T_{(11)} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} [\gamma_{11} + \nu \gamma_{22}] \\
T_{(22)} &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} [\gamma_{22} + \nu \gamma_{11}]
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$T_{(12)} = T_{(21)} = \frac{Eh}{1 + \nu} \gamma_{12} \tag{B.16}$$

Lineaarsed momendi avaldised

$$\begin{aligned} M_{(11)} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [\xi_{11} + \nu\xi_{22}] \\ M_{(22)} &= \frac{Ehh^3}{12(1-\nu^2)} [\xi_{22} + \nu\xi_{11}] \\ M_{(12)} &= M_{(21)} = \frac{Ehh^3}{12(1+\nu)} \xi_{12} \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Lineaarsed põikjõu avaldised

$$N_{(1)} = 2h\mu\theta_{(1)}, \quad N_{(2)} = 2h\mu\theta_{(2)} \quad (\text{B.18})$$

Pöörded ja siirded

$$\Theta_{(1)} = \rho\theta_{(1)}, \quad \Theta_{(2)} = \rho\theta_{(2)}, \quad \Lambda = \rho\beta \quad (\text{B.19})$$

ning

$$A_{(1)} = \alpha_{(1)}, \quad A_{(2)} = \alpha_{(2)} \quad (\text{B.20})$$

Mittelineaarsed deformatsioonid

$$\begin{aligned} \gamma_{(11)} &= \eta_{(11)} + \frac{1}{2} (\eta_{(11)}^2 + \eta_{(12)}^2 + \omega_{(1)}^2) \\ \gamma_{(22)} &= \eta_{(22)} + \frac{1}{2} (\eta_{(22)}^2 + \eta_{(21)}^2 + \omega_{(2)}^2) \\ \gamma_{(12)} &= \gamma_{(21)} = \frac{1}{2} (\eta_{(12)} + \eta_{(21)} + \eta_{(11)}\eta_{(21)} + \eta_{(12)}\eta_{(22)} + \omega_{(1)}\omega_{(1)}) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

$$\begin{aligned} \xi_{(11)} &= \kappa_{(11)} + \omega_{(1)}\mu_{(1)} + \eta_{(11)}\kappa_{(11)} + \eta_{(12)}\kappa_{(12)} \\ \xi_{(22)} &= \kappa_{(22)} + \omega_{(2)}\mu_{(2)} + \eta_{(22)}\kappa_{(22)} + \eta_{(21)}\kappa_{(21)} \\ \xi_{(12)} &= \xi_{(21)} = \frac{1}{2} (\kappa_{(12)} + \kappa_{(21)} + \omega_{(1)}\mu_{(2)} + \omega_{(2)}\mu_{(1)} + \\ &\quad + \eta_{(11)}\kappa_{(21)} + \eta_{(12)}\kappa_{(22)} + \eta_{(11)}\kappa_{(11)} + \eta_{(22)}\kappa_{(12)}) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} k\theta_{(1)} &= \frac{1}{2} (\omega_{(1)} + \iota_{(1)} + \eta_{(11)}\iota_{(1)} + \eta_{(12)}\iota_{(2)}) \\ k\theta_{(2)} &= \frac{1}{2} (\omega_{(2)} + \iota_{(2)} + \eta_{(21)}\iota_{(1)} + \eta_{(22)}\iota_{(2)}) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\theta_{(1)} = v_{(1)}^*, \quad \theta_{(2)} = v_{(2)}^*, \quad \beta = w^*, \quad \alpha_{(1)} = \varphi_{(1)}^*, \quad \alpha_{(1)} = \varphi_{(1)}^* \quad (\text{B.24})$$

Lineaarsed deformatsioonid

$$\begin{aligned}
\eta_{(11)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial v_{(1)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v_{(2)} + \frac{w}{R_1} \\
\eta_{(22)} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v_{(2)}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v_{(1)} + \frac{w}{R_2} \\
\eta_{(12)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial v_{(2)}}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v_{(1)} \\
\eta_{(21)} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v_{(1)}}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v_{(2)}
\end{aligned} \tag{B.25}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{(11)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_{(2)} \\
\kappa_{(22)} &= \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi_{(1)} \\
\kappa_{(12)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \varphi_{(2)}}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \varphi_{(1)} \\
\kappa_{(21)} &= \frac{1}{B} \frac{\partial \varphi_{(1)}}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \varphi_{(2)}
\end{aligned} \tag{B.26}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{(1)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{v_{(1)}}{R_1} \\
\omega_{(2)} &= \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v_{(2)}}{R_2}
\end{aligned} \tag{B.27}$$

$$\mu_{(1)} = -\frac{\varphi_{(1)}}{R_1}, \quad \mu_{(2)} = -\frac{\varphi_{(2)}}{R_2} \tag{B.28}$$

$$\iota_{(1)} = \varphi_{(1)}, \quad \iota_{(2)} = \varphi_{(2)} \tag{B.29}$$

Eespool vaadeldud koorikute võrrandeid on võimalik kirjutada lahti konkreetsete koorikute jaoks (vt. A.Lahe [13]).

Lisa C

GNU Üldine Avalik Litsents

GNU Üldine Avalik Litsents

Versioon number 2, juuni 1991

Autoriõigus (c) 1989, 1991 Free Software Foundation, Inc. 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA

Igaüks võib käesolevast dokumendist valmistada koopiaid ning valmistatud koopiaid levitada tingimusel, et need koopiaid vastavad originaaldokumendile sõnasõnalt.

EESSÕNA

Enamik tarkvara litsentse on loodud selleks, et võtta Teilt õigus tarkvara jagada ja muuta. Vastukaaluks on GNU Üldine Avalik Litsents mõeldud selleks, et tagada Teile vabadus jagada ja muuta vaba tarkvara - kindlustada, et tarkvara oleks vaba kõigile selle kasutajatele. Käesolev Üldine Avalik Litsents kehtib enamiku Free Software Foundation'i tarkvara ja mistahes programmide kohta, mille autorid lubavad seda litsentsi kasutada. (Mõni Free Software Foundation'i tarkvara on vastavalt kaitsitud GNU Üldise Avaliku Teegilitsentsiga). Ka Teie võite oma programmi suhtes käesoleva litsentsi tingimusi kehtestada.

Rääkides vabast tarkvarast peame silmas vabadust, mitte hinda. Üldised Avalikud Litsentsid on loodud selleks, et tagada Teile järgnevat: õigust levitada koopiaid vabast tarkvarast (soovi korral ka levitamise eest tasu võttes), tarkvara lähtetekstide kättesaadavust, õigust tarkvara muuta ning kasutada tarkvara osi uute vaba tarkvaratoodete loomisel ning kindlustada, et Te olete teadlik eelpoolnimetatud õigustest.

Teie õiguste tagamiseks on vaja rakendada mõningaid piiranguid, et keegi ei saaks Teilt neid õigusi ära võtta või nõuda Teie loobumist neist õigustest. Tarkvara muutmisel või selle koopiate levitamisel kätkevad need piirangud Teie jaoks teatud kohustusi. Näiteks levitades taolise programmi koopiaid, kas tasuta või levitamise eest tasu võttes, peate Te saajatele andma kõik need õigused, mis on ka Teil endal. Te peate kindlustama, et ka nemad saavad või võivad soovi korral saada lähteteksti. Et programmi saajad teaksid oma õigusi, peate neid teavitama käesoleva Litsentsi tingimustest.

Meie kaitseme Teie õigusi kaheastmeliselt:

1. anname tarkvarale autoriõiguse ja
2. pakume Teile käesolevat litsentsi, mis annab Teile seadusliku õiguse kopeerida, levitada ja/või muuta tarkvara.

Samuti tahame nii iga autori kui ka meie endi kaitseks kindlustada, et igaüks mõistab, et vabal tarkvaral pole garantiid. Kui keegi tarkvara muudab ja edasi annab, peavad selle saajad teadma, et nende omanduses pole originaal vältimaks teiste poolt põhjustatud probleemide mõju originaali autori mai-nele.

Lõpuks, iga vaba programmi ähvardab pidevalt tarkvara patenteerimine. Me soovime vältida ohtu, kus vaba programmi levitajad omandavad individuaalse patendi litsentsi, muutes selle enda omandiõiguse objektiks. Sellise olukorra vältimiseks oleme selgitanud, et iga taoline patent tuleb litsenseerida kõigile vabaks kasutamiseks või üldse mitte litsenseerida.

Järgnevad kopeerimise, levitamise ja muutmise täpsed terminid ning tingimused.

Kopeerimise, levitamise ja muutmise terminid ja tingimused.

0. Käesolev litsents kehtib iga programmi või muu teose puhul, mis sisaldab autoriõiguse omaniku märget selle kohta, et antud programmi võib levitada vastavalt käesoleva Üldise Avaliku Litsentsi tingimustele. "Programm" on edaspidi ükskõik milline eelnevale tingimusele vastav programm või teos, "Programmil põhinev teos" tähendab kas Programmi või ükskõik millist autorikaitse all olevat programmil põhinevat teost; lahti seletatuna teost, mis sisaldab Programmi või selle osa, kas sõnasõnaliselt või muudetult ja/või tõlgituna teise keelde. (Siin ja edaspidi on tõlkimine kaasatud piiranguteta termini "muutmine" alla). Iga litsensiaat on edaspidi "Teie".

Litsents ei laiene muudele tegevustele kui kopeerimine, levitamine ja muutmine; need ei ole Litsentsiga kaetud. Programmi töötamise protsessil pole kitsendusi ja Programmi väljund on kaitstud vaid siis, kui selles sisaldub teos, mis põhineb Programmil (sõltumatuna sellest, et see on Programmi tööprotsessi poolt valmistatud). Kas see on tõene, sõltub sellest mida Programm teeb.

1. Teie võite kopeerida ja levitada sõnasõnaliselt koopiasid Programmi lähtetekstist nii, nagu olete selle saanud, igas vormis, eeldusel, et Teie avaldate arusaadavalt ja sobivalt igal koopial vastava autoriõiguse märke ja garantii välistamise märke: hoiate puutumatuna kõik märged, mis viitavad käesolevale Litsentsile ja igasugusele garantii puudumisele ning annate kõigile Programmi saajatele käesoleva Litsentsi koopia Programmiga kaasa. Te võite võtta tasu koopia füüsilise kättetoimetamise akti eest ja võite oma valiku kohaselt pakkuda tasu eest omapoolset garantiikaitset.

2. Teie võite muuta Programmi koopiat või koopiasid või ükskõik millist selle osa, luues nii Programmil põhineva teose ning kopeerida ja levitada selliseid muudatusi või teoseid vastavalt punkti 1 tingimustele, eeldades, et Te täidate kõik järgnevad tingimused:

a) Te peate kaasama muudetud failile silmatorkavad märged, mis teatavad Teie poolt tehtud muudatused failides ja iga muudatuse kuupäeva.

b) Te peate andma kõigile kolmandatele osapooltele selle Litsentsi tingimuste kohaselt Litsentsi tervikuna igasugusele teosele, mida Te levitate või avalikustate, mis tervikuna või osaliselt sisaldab Programmi või põhineb Programmil või selle osal.

c) Kui muudetud Programm loeb normaalse tööprotsessi käigus kärke interaktiivselt, peate Te tagama, et tavaliseks interaktiivseks kasutamiseks käivitamisel kõige tavapärasemal viisil kas trükitakse või kuvatakse märke, mis sisaldab vastatavat märget autoriõigusest ja märget garantii puudumise kohta (või märget Teie poolt pakutava garantii kohta) ning et kasutajad võivad Programmi käesolevate tingimuste kohaselt edasi levitada, teatades kasutajale, kuidas näha koopiat käesolevast Litsentsist. (Erand: Kui Programmi ise on interaktiivne, kuid tavapärase kasutamise protsessi käigus ei trüki sellist teadaannet, siis ei pea Teie Programmil põhinev teos vastavat teadaannet trükkima).

Need nõuded kehtivad muudetud teosele kui tervikule. Kui selgelt eristatavad osad teosest ei põhine Programmil ja neid võib põhjendatult lugeda iseseisvateks ja eraldiseisvateks teosteks, siis käesoleva Litsentsi ja selle tingimused ei laiene nimetatud osadele, kui Te levitate neid iseseisvate teostena. Kui Te levitate nimetatud osi kui osa tervikust, milleks on Programmil põhinev teos, siis terviku levitamine peab järgima käesoleva Litsentsi tingimusi, mille teistele litsensiaatidele antud õigused laienevad ülejäänud tervikule, seega igale üksikule osale, olenemata sellest, kes autor oli.

Seega pole käesoleva punkti eesmärk nõuda õigusi või vaidlustada Teie õigusi teosele, mille Te oled tervikuna loonud; pigem on eesmärk kasutada õigust suunata Programmil põhinevate teoste või ühistoste levitamist.

Lisaks, ainuüksi asjaolu, et teise teose, mis ei põhine Programmil, Programmiga (või Programmil põhineva teosega) ühtsesse levitamise- või säilitusvormi liitmine ei muuda nimetatud teost Litsentsi alla kuuluvaks.

3. Teie võite Programmi (või punkt 2 kohaselt Programmil põhinevat teost) kopeerida ja levitada objektкодina või käivitataval kujul vastavalt punktide 1 ja 2 kohaselt eeldusel, et Te täidate vähemalt

ühe järgnevatest nõuetest:

- a) Lisate sellele täieliku vastava masinloetava lähteteksti, mida peab levitama vastavalt punktides 1 ja 2 toodud tingimustele, vormis, mida kasutatakse valdavalt tarkvara vahendustegevuses; või
- b) Lisate sellele kirjaliku vormi, kehtivusega vähemalt kolm aastat, millega annad mistahes kolmandatele osapooltele tasu eest, mis ei ületa Teie poolt lähteteksti füüsilisel kujul levitamise hinda, täieliku masinloetava koopia vastavast lähtetekstist, mida levitatakse vastavalt punktides 1 ja 2 toodud tingimustele, vormis, mida kasutatakse valdavalt tarkvara vahendustegevuses; või
- c) Lisate sellele informatsiooni, mille Teie saite ja mis puudutab vastava lähteteksti levitamise pakkumist. (See alternatiiv on lubatud vaid mitteärilisel levitamisel, kui Te oled saanud Programmi koos vastava pakkumisega objektкодina või käivitatavas vormis vastavalt käesoleva punkti alapunktile b).

Teose lähteteksti all mõeldakse muudatuste tegemiseks eelistatumat teose vormi. Käivitatava teose täielik lähtetekst tähendab kogu lähteteksti tervikuna koos kõigi selles sisalduvate moodulitega, lisades ükskõik millised sellega seotud liidese definitsioonifailid ning skriptid, mida kasutatakse käivitatava teose kompileerimise ja paigaldamise kontrollimiseks. Erandina ei pea levitav lähtetekst sisaldama midagi, mida tavaliselt levitatakse kas lähteteksti või masinkoodi vormis) koos põhiliste operatsioonisüsteemi komponentidega (kompilaator, kernel ja nii edasi), millel käivitatava töö protsess toimub, välja arvatud kui nimetatud komponent ise lisandub käivitatavale.

Kui käivitatava vormi või objektкодi levitamine toimub ligipääsu pakkumisega määratud kohas, siis ligipääsu pakkumine lähteteksti kopeerimiseks samast kohast loetakse võrdseks lähteteksti levitamise, kuigi kolmandad osapooled pole kohustatud kopeerima lähteteksti koos objektкодiga.

4. Te ei tohi kopeerida, muuta, edasi litsenseerida või levitada Programmi välja arvatud juhul, kui seda lubab käesolev Litsents. Igasugune muu katse kopeerida, muuta, sublitsenseerida või levitada Programmi on õigustühine ja peatab automaatselt Teile käesoleva Litsentsiga antud õigused. Siiski, osapoolte, kes on saanud Teilt koopiaid või õigused käesoleva Litsentsi alusel, litsentsid ei kaota kehtivust nii kaua, kuni taolised osapooled täidavad täielikult kehtestatud tingimusi.

5. Teilt ei nõuta Litsentsi aktsepteerimist, kuna Te pole sellele alla kirjutanud. Kuid miski muu peale käesoleva Litsentsi ei anna Teile õigust muuta või levitada Programmi või Programmil põhinevat teost. Need tegevused on seadusega keelatud, kui Te ei aktsepteeri käesoleva Litsentsi tingimusi. Sellest tulenevalt Programmi (või igasugust Programmil põhinevat teost) muutes või levitades annate Teie märku nõustumisest Litsentsi terminite ja tingimustega Programmi või Programmil põhineva teose kopeerimisel, levitamisel või muutmisel.

6. Iga kord kui Te levitate Programmi (või ükskõik millist Programmil põhinevat teost), saab saaja automaatselt originaallitsensiaarilt litsentsi kopeerida, levitada ja muuta Programmi vastavalt käesoleva Litsentsi terminitele ja tingimustele. Teie ei või kehtestada lisapiiranguid vastuvõtjale antud õiguste kasutamisele. Teie ei vastuta käesoleva Litsentsi täitmise eest kolmandate osapoolte poolt.

7. Kui kohtulahendi või väidetava patendiõiguse rikkumise tagajärjel või mõnel muul põhjusel (mis ei piirdu patendiga seotud küsimustega) on Teile pandud kohustus, mis on vastuolus käesoleva Litsentsi tingimustega, siis ei vabasta need Teid käesoleva Litsentsi tingimuste täitmisest. Kui Te ei suuda levitada, samaaegselt täites käesoleva Litsentsi tingimusi ja teisi kohustusi, siis ei tohi Te Programmi üldse levitada. Näiteks kui patendilitsents ei luba Teil litsentsitasuta Programmi edasi levitada neile, kes on saanud Teilt või Teie kaudu Programmi koopia, siis ainus võimalus täita nimetatud patendilitsentsi ja käesoleva Litsentsi tingimusi on loobuda Programmi levitamisest.

Kui käesoleva punkti mõni osa osutub mingil asjaolul kehtetuks või mitterakendatavaks, siis käesoleva punkti ülejäänud osa loetakse rakendatavaks ja punkt tervikuna loetakse rakendatavaks ülejäänud tingimustel.

Käesoleva punkti eesmärk ei ole kellegi ajendamine patendi- või muude õiguste rikkumiseks või nende kehtivuse vaidlustamiseks; käesoleva punkti ainus eesmärk on vaba tarkvara levitamise süsteemi terviklikkuse kaitsmine, mida kasutavad avalike litsentside kasutajad. Paljud isikud on andnud suure panuse tarkvara laiale sektorile, mida levitatakse läbi nimetatud süsteemi usaldades järjekindlat süsteemi rakendumist; autor/annetaja on otsustaja, kas ta soovib tarkvara levitada mõne teise süsteemi kaudu ja litsensiaat ei saa seda valikut mõjutada.

Selle punkti eesmärk on täpselt selgitada, mida soovitakse käesoleva Litsentsi ülejäänud osaga saavutada.

8. Kui Programmi levitamist ja/või kasutamist piiratakse mõnedes riikides kas patentide või autoriõigusega, võib autoriõiguse omanik, kes on Programmi litsenseerinud, lisada kindla geograafilise piirangu, jättes nimekirjast välja mainitud riigid, et levitamine oleks lubatud vaid nimekirjas toodud riikides või riikide vahel. Nimetatud juhul Litsents liitub piiranguga, nagu see on ära toodud käesoleva Litsentsi põhiosas.

9. Free Software Foundation võib aegajalt välja anda ümbertöötatud ja/või uusi versioone Üldisest Avalikust Litsentsist. Need uued versioonid on käesoleva Litsentsi versiooniga sarnase sisuga, kuid võivad erineda detailides, osundades uusi probleeme või huviobjekte.

Igale versioonile antakse unikaalne versiooninumber. Kui programmis tuuakse ära selle kohta kehtiva käesoleva litsentsi versiooninumber ja lisatakse märge "kõik hilisemad versioonid", siis on teil võimalik valida, kas järgida selle või ükskõik millise hilisema Free Software Foundation'i poolt avaldatava versiooni tingimusi. Kui Programm ei täpsusta käesoleva litsentsi versiooninumbrit, on Teil võimalus valida ükskõik milline Free Software Foundation'i poolt avaldatud käesoleva Litsentsi versioon.

10. Kui Te soovite Programmi osi liita teiste vabade programmidega, mille levitamise tingimused on erinevad, siis kirjutage loa saamiseks autorile. Tarkvara puhul, mis on autoriõigusega kaitstud Free Software Foundation'i poolt, kontakteeruge Free Software Foundation'iga, mõnikord me teeme erandeid. Meie otsuse määravad kaks eesmärki: säilitada vaba staatus meie vaba tarkvara igasugustele derivaatidele ja edendada tarkvara jagamist ning taaskasutamist üldiselt.

GARANTII PUUDUMINE

11. KUNA PROGRAMM ON LITSENSEERITUD TASUTA, PUUDUB PROGRAMMIL IGASUGUNE GARANTII ULATUSENI, MIDA LUBAB RAKENDATAV SEADUS. KUI KIRJALIKULT POLE TEISITI SÄTESTATUD, SIIS AUTORIÕIGUSE OMANIKUD JA/VÕI MUUD OSAPOOLLED PAKUVAD PROGRAMMI "NII, NAGU TA ON" ILMA IGASUGUSE VÄLJENDATUD VÕI OLETATAVA GARANTIITA, KAASA ARVATUD, KUID MITTE AINULT, KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI JA MINGILE KINDLALE EESMÄRGILE SOBIVUSE GARANTIITA. KOGU PROGRAMMI KVALITEEDI JA TOIMIMISE RISK LANGEB TEILE. KUI PROGRAMM ON PUUDULIK, KANNATE TEIE KÕIK TEENINDUSE, PARANDUSE VÕI TAASTAMISE KULUD.

12. MITTE MINGIL JUHUL, VÄLJA ARVATUD SIIS, KUI SEDA NÕUAB RAKENDATAV SEADUS VÕI KIRJALIKULT ON TEISITI KOKKU LEPITUD, POLE ÜKSKI AUTORIÕIGUSE OMANIK VÕI KOLMAS OSAPOOL, KES VÕIB MUUTA JA/VÕI LEVITADA PROGRAMMI VASTAVALT ÜLALPOOL TOODUD TINGIMUSTELE, TEIE EES VASTUTAV KAHJUSTUSTE EEST, KAASA ARVATUD IGASUGUSED ÜLDISED, SPETSIIFILISED, JUHUSLIKUD VÕI TAGAJÄRJEL TEKKINUD KAHJUD, MIS TULENEVAD KAS PROGRAMMI KASUTAMISEST VÕI VÕIMATUSEST PROGRAMMI KASUTADA (KAASA ARVATUD, KUID MITTE AINULT, TEIE VÕI KOLMANDATE OSAPOOLTE ANDMETE KADUMINE VÕI ANDMETE MUUTMINE VÕI PROGRAMMI VÕIMETUS TÖÖTADA KOOS MISTAHES TEISTE PROGRAMMIDEGA), ISEGI SIIS, KUI VALDAJAT VÕI MUUD OSAPOOLT ON TEAVITATUD SELLISTE KAHJUDE VÕIMALIKKUSEST.

Terminite ja tingimuste lõpp.

Kuidas rakendada oma uutele programmidele neid termineid ja tingimusi?

Kui Te loote uue programmi ja soovite, et sellest oleks võimalikult laiale üldsusele kasu, on parim võimalus selleks muuta oma tarkvara vabaks, mida igäüks saaks edasi levitada ja muuta vastavalt käesolevatele tingimustele.

Et seda teha, lisage oma programmile järgnevad märkused. Kindlaim on lisada need märked iga lähtefaili algusse, et võimalikult efektiivselt teatada garantii puudumisest: igal failil peaks olema vähemalt üks "autoriõiguse" rida ja viide kohale, kust võib leida tervikliku märkuse.

Üks rida, mis sisaldab programmi nime ja otstarbe lühikirjeldust.

Copyright (C) YYYY autori nimi

Käesolev programm on vaba tarkvara. Te võite seda edasi levitada ja/või muuta vastavalt GNU Üldise Avaliku Litsentsi tingimustele, nagu need on Vaba Tarkvara Fondi poolt avaldatud; kas Litsentsi versioon number 2 või (vastavalt Teie valikule) ükskõik milline hilisem versioon.

Seda programmi levitatakse lootuses, et see on kasulik, kuid ILMA IGASUGUSE GARANTIITA; isegi KESKMISE/TAVALISE KVALITEEDI GARANTIITA või SOBIVUSELE TEATUD KINDLAKS EESMÄRGIKS. Üksikasjade suhtes vaata GNU Üldist Avalikku Litsentsi.

Te peaks olema saanud GNU Üldise Avaliku Litsentsi koopia koos selle programmiga, kui ei, siis kontakteeruge Free Software Foundation'iga, 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA

Samuti lisa informatsioon, kuidas Teiega kontakteeruda kas posti või meili teel.

Kui programm on interaktiivne, siis lisage väljundisse käivitamisel kuvatav märkus:

Gnomovision versioon 69, Copyright (C) aastaarv, autori nimi

Gnomovision on ILMA IGASUGUSE GARANTIITA; detailidega tutvumiseks trüki "show w". See on vaba tarkvara ja sa oled teretulnud seda edasi levitama teatud kindlate tingimuste alusel; detailidega tutvumiseks trüki "show c".

Hüpoteetilised käsud "show w" ja "show c" peaksid olema vastavad osad GNU Üldisest Avalikust Litsentsist. Muidugi võivad Teie poolt kasutatavad käsud olla teise nimetusega kui "show w" või "show c"; need võivad olla isegi hiireklõpsud või menüü osad - ükskõik, mis sobib Teie programmiga.

Kui Te töötate programmeerijana, peaksite Te laskma oma tööandjal või koolil alla kirjutada autoriõiguslike pretensioonide loobumise kohta käivale dokumendile. Siin on näidis, muutke ise nimed:

Yoyodyne, Inc., loobub kõigist autoriõigustest programmile Gnomovision, mille on kirjutanud James Hacker.

See Üldine Avalik Litsents ei anna õigust liita Teie programmi omandiõiguslike programmidega. Kui Teie programm on alamfunktsioonide teek, on Teil kasulikum lubada linkimist teegiga. Kui Te tahate seda teha, siis kasutage GNU Üldist Avalikku Teegilitsentsi käesoleva Litsentsi asemel.

GNU Üldine Avalik Litsents on leheküljelt

<http://wiki.linux.ee/phpwiki/GNU>

<http://linux.ee/materjalid/gpl/>

<http://hasso.linux.ee/linux/lgpl.php>

<http://hasso.linux.ee/linux/gpl.php>

GNU Üldine Avalik Litsentsi kohta saab lugeda

- Vaba tarkvara:

<http://kuutorvaja.eenet.ee/tutvustus/gnulinux.html>

- K. Kikkas. Intelektuaalomand ja ITK:
<http://www.kakupesa.pri.ee:8080/akadeemia/arhiiv/VR1/loengud/loeng5>
- T. Dovnar. Tarkvara patendid Ameerikas, Euroopas ja Eestis (Diplomitöö):
<http://www.juura.ee/txt/tarkvarapatendid.pdf>
- <http://www.dsl.org/>
- <http://www.gnu.ai.mit.edu/philosophy/philosophy.html>
- <http://www.gnu.org/philosophy/license-list.html#SoftwareLicenses>
- <http://www.dsl.org/copyleft/non-software-copyleft.shtml#what>
- <http://www.dsl.org/copyleft/non-software-copyleft.shtml>
- <http://www.dsl.org/copyleft/>
- <http://opencontent.org/opl.shtml>

Kirjandus

- [1] L. J. Ainola. *Variatsioonnõe metodõ dlja nelineinõh uravnenii dviženia obolotsek*, Prikladnaja matematika i mehaanika, T.32, No. 4, 1968, lk. 154-158
vene keeles:
Л. Я. Айнола., *Вариационные методы для нелинейных уравнений движения оболочек*, Прикл. матем. и мех., Том. 32, No.4, 1968, с.154-158 [B.1](#)
- [2] U. Andelfinger. Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid - gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke. Bericht 13, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 12. Juli 1991.
- [3] J. H. Argiris. Energy theorems and structural analysis, a. Part I General theory. *Aircraft Engineering*, 26:347 – 356, Oct 1954. [1.1](#)
- [4] F. J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice - Hall, Inc., 1982. [1.1](#)
- [5] E. B. Becer, G. F. Carey and J.T. Oden. *Finite Elements. An Introduction*. Prentice - Hall Inc., 1981. [1.1](#)
- [6] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics*. Interscience, New York, 1953. [8.2.8](#)
- [7] R. Eek ja L. Poverus. *Ehitusmehaanika II*. Valgus, Tallinn, 1967. [8.1.1](#)
- [8] L. E. Elsgolts. *Differentsialnõe uravnenija i variatsioonnoe istšislenie*. Nauka, Moskva, 1969. [9.2](#)
- [9] C. A. Felippa and C. Militello. Developments in variational methods for high performance plate and shell elements. In A. K. Noor et al., editor, *Analitical and Computational Models of Shell*. ASME Special Publication, 1989. [A.3](#)
- [10] R. H. Gallagher. *Finite Element Analysis. Fundamentals*. Prentice-Hall Inc., 1975. [1.1](#)
- [11] T. J. R. Huges. *Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice - Hall Inc., 1987. [1.1](#)

- [12] W. B. Krätzig. Statik der Tragwerke 4. (4.a Grundlagen; Stabtragwerke). Ruhr - Universität Bochum, Fakultät für Bauingenieurwesen, Bochum, 1991. [3.6.1](#)
- [13] A. J. Lahe. *Nonlinear and Linear Theories of axially symmetric Deformation of thin elastic Shells of revolution*, in: ed. U.K. Nigul, *Echo Signals from elastic Objects*, Joint Publications Research Service, Arlington Virginia, 1975, lk. 208-226
vene keeles:
А. Я. Лахе., *Нелинейная и линейная теории осесимметричной деформации тонких упругих оболочек вращения*, в Сб: *Эхо-сигналы от упругих объектов*, под ред. У.К. Нигула, Академия наук Эстонской ССР, Таллинн, 1974, с.273-295 [B.1](#)
- [14] R. H. MacNeal and R. L. Harder. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Element in Analysis and Design*, 1:3 – 20, 1985. [9.2](#)
- [MR95] J. Metsaveer, U. Raukas. *Varda deformatsioonid ja siirded*. Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, Mehaanikainstituut, 1995. [1.1](#), [3.6.1](#)
- [MR96] J. Metsaveer, U. Raukas. *Varda sisejõud ja pinged*. Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, Mehaanikainstituut, 1996. [3.3](#), [3.6.1](#)
- [15] A. K. Noor. Survey of some finite - element software systems. In H. Kardestuncer, editor, *Finite Element Handbook*, pages 4.259 – 4.310. McGraw -Hill Book Co, New York, Hamburg, London, Paris, Tokyo, 1987. [9.1](#)
- [16] N.Š. Ottosen and H. Petersson. *Introduction to the Finite Element Method*. Lund University, Division of Structural Mechanics, Lund, second edition, 1991. [1.1](#), [1.1](#), [8.2.5](#), [8.3.1](#)
- [17] L. A. Rozin. *Variatsionnõe postanovki zadatš dlja uprugih sistem*. Izdatelstvo Leningradskogo Universiteta, Leningrad, 1978.
Vene keeles:
Розин Л.А. *Вариационные постановки задач для упругих систем*. Издательство Ленинградского Университета, Ленинград, 1978, 224 с. [A.3](#), [A.3](#)
- [18] J. C. Simo and M.Š. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. J. Numer. Meth. in Engrg.*, 29:1595 –1638, 1990.
- [19] R. L. Taylor, O. C. Zienkiewicz and A. C. H. Chan. The patch test – a condition for assessing FEM convergence. *Int. J. Numer. Meth. in Engrg.*, 22:39 – 62, 1986.
- [20] E. Tonti. A mathematical model for physical theories. *Atti. Accad. naz. Lincei.*, 52(2):175 – 181, 1972. [1.1](#)
- [21] E. Tonti. A mathematical model for physical theories. *Atti. Accad. naz. Lincei.*, 52(3):350 – 356, 1972. [1.1](#)

- [22] E. Tonti. On the mathematical structure of large class of physical theories. *Atti. Accad. naz. Lincei.*, 52(1):48 – 56, 1972. [1.1](#)
- [23] K. F. Tsernõh. *Lineinaja teoria obolotsek II*, Izdatelstvo Leningradskogo Universiteta, Leningrad, 1964, 396 lk.
vene keeles:
К. Ф. Церных., *Линейная теория оболочек II*, Издательство Ленинградского Университета, Ленинград, 1964, 396 с.
- [24] E. L. Wilson, R. L. Taylor, W. P. Doherty and J. Ghagoussi. Incompatible displacement models. In S. T. Fenves et al., editor, *Numerical and Computational Methods in Structural Mechanics*, pages 47 – 57. Academic Press, 1973.
- [25] O. C. Zienkiewicz *The Finite Element Method*. McGraw - Hill Book Co., Ltd., 1977. [1.1](#), [8.3.1](#)
- [26] O. C. Zienkiewicz, S. Qu, R. L. Taylor and S. Nakazawa. The patch test for mixed formulations. *Int. J. Numer. Meth. in Engrg.*, 23:1873 – 1883, 1986. [1.1](#)
- [27] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor and J. M. Too. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Int. J. Numer. Meth. in Engrg.*, 3:275 – 290, 1971.

Aineregister

- ühikvektorite kolmikud, 32
- ühtlane lähendamine, 18
- ülekandevõrrandid, 43, 44

- ahelpinged, 115
- aktiivtöö, 26
- alammaatriks, 39
- anisotroopne materjal, 97
- aproksimatsiooniviga, 67
- arvutusmehaanika, 11
- astaku puudujääk, 141
- astmekeskmin lähendamine, 19

- biharmooniline võrrand, 123, 145

- Cholesky lahutus, 97

- deformatsiooni pidevuse tingimus, 93
- deformatsioonienergia, 14, 98, 103
- diferentseerimise vektor, 123
- differentiaalvõrrandi lahendi hälve, 20

- elastsuskonstantide maatriks, 106
- elastsusmaatriks, 97
- element
 - 12 vabadusastmega, 139
 - geomeetrilised häired, 141
 - isoparameetriline, 86
 - kümne sõlmega, 62
 - kaheksa sõlmega, 63
 - kuue sõlmega, 62
 - mittekooskõlaline, 138
 - subparameetriline, 86
 - superparameetriline, 86
- energiateoreem, 12
- esimene märgikokkulepe, 81
- Euleri võrrand, 144

- fenomenoloogiline, 13
- fenomenoloogiline mudel, 12
- funktsionaal, 143
- funktsioon, 143
- funktsioonide lähendamine, 17
- funktsioonide skalaarkorrutis, 12

- Gaussi valem, 67
- Gaussi-Radau skeem, 74
- Greeni-Gaussi valemid, 128, 129

- hälve
 - differentiaalvõrrandi lahendi hälve, 20
 - kinemaatiliste rajatingimuste hälve, 20
 - staatiliste rajatingimuste hälve, 20

- hõre maatriks, 41
- Heaviside'i funktsioon, 43
- Hermite'i interpolatsioon, 81
- Hermite'i interpolatsioonifunktsioon, 53
- Hermite'i interpolatsioonipolünoom, 52, 60
- Hermite'i polünoom, 68

- I märgikokkulepe, 34
- II märgikokkulepe, 34
- indekstabelid, 25, 38
- indextabelid, 25
- integreerimis
 - kaal, 67, 78
 - kordaja, 67
 - punkt, 67
 - sõlm, 67
 - sõlme koordinaadid, 78
- integreerimissõlm, 54
- interpolatsioonisõlm, 64
- isoparameetriline element, 86
- isotroopne materjal, 97

- jäävusseadused, 126

- jäik plaat, 115
- jäikusmaatriks, 24, 110
 - konstruktsiooni jäikusmaatriks, 25, 29
 - vedru, 24
- Jacobi polünoom, 68
- jakobiaan, 77
- kümne sõlmega element, 62
- kõlblikud rajatingimused, 126
- kaalufunktsioon, 19, 20, 67, 68
- kaalutud lähendamine, 19
- kaheksa sõlmpunktiga element, 63
- keskmise lähendamine, 19
- kinemaatilised rajatingimused, 16, 126
- kinemaatiliste rajatingimuste hälve, 20
- Kirchhoffi teooria, 116, 123
- kohalikud koordinaadid, 31
- kolmnurga pindalakoordinaadid, 61, 72, 73
- konstruktsiooni jäikusmaatriks, 25, 29
- koordinaatide teisendus, 32
- kooskõlalise nõue, 136
- kujufunktsioon, 49, 55, 56, 58, 63, 110
- kuue sõlmega element, 62
- L-koordinaadid, 72
- lähendamine
 - ühtlane lähendamine, 18
 - astmekeskmine lähendamine, 19
 - kaalutud lähendamine, 19
 - keskmise lähendamine, 19
 - ruutkeskmise lähendamine, 19
- lähendfunktsioon
 - üldistatud polünoom, 18
 - algebraalne, 18
 - trigonomeetiline, 18
- lähteformuleering, 20
- lõige, 43
- Laguerre'i polünoom, 68
- Legendre'i polünoom, 68, 69
- Legendre'i polünoomi sõlmed, 70
- loomulikud rajatingimused, 16
- lukustus, 141
- märgikokkulepe, 34
 - I märgikokkulepe, 34
 - II märgikokkulepe, 34
- maatriks
 - alammaatriks, 39
 - elastsuskonstantide, 106
 - elastsusmaatriks, 97
 - hõre maatriks, 41
 - jäikusmaatriks, 110
 - maatrikskorrutis, 36
 - ortogonaalne, 35
 - ortogonaalne maatriks, 34
 - pingemaatriks, 106
- mahujõudude töö, 103
- materjal
 - anisotroopne, 97
 - isotroopne, 97
 - ortotroopne, 97
- membraan, 116
- Mindlini-Reissneri teooria, 127, 140
- mittekooskõlaline element, 138
- mudel, 12
- nõrgad lahendid, 126
- nõrkformuleering, 20
- NAFEMS nõuded, 141
- Newtoni-Cotes'i valem, 67
- nihkedeformatsioon, 121
- olekuvõrrandid, 12
- olulised rajatingimused, 16
- ortogonaalne polünoom, 68
- ortotroopne materjal, 97
- ositi integreerimise valem, 15
- pöördformuleering, 20
- painduv plaat, 116
- paine, 43
- parema käe kolmikud, 32
- Pascali kolmnurk, 54
- passiivtöö, 26
- pidevus
 - C^1 -pidevus, 137
 - C^n -pidevus, 137
- pike, 43
- pingemaatriks, 106
- pingevektor, 95

- plaadi keskpind, 115
 plaat
 jäik, 115
 keskpind, 115
 lukustus, 141
 painduv, 116
 rajatingimused, 135
 sisejõud, 117
 polünoom
 Hermite'i, 68
 Jacobi, 68
 Laguerre'i, 68
 Legendre'i, 68, 69
 sõlmed, 68
 Tšebõšovi, 68
 polünoomi kordaja, 49
 polünoomi sõlmed, 48, 68
 potentsiaalne energia, 14
 prinkus, 43
 lõikeprinkus, 43
 paindeprinkus, 43
 pikkeprinkus, 43

 rajajõudude töö, 12, 26, 104
 rajajõudude võimalik töö, 16, 81
 rajatingimused, 14
 kinemaatilised, 126
 staatilisid, 126
 rajatingimused
 kinemaatilised, 16
 loomulikud, 16
 olulised, 16
 staatilisid, 16
 ristlõike jäikus, 43
 lõikejäikus, 43
 paindejäikus, 43
 pikkejäikus, 43
 väänejäikus, 43
 Rodriguesi valem, 68
 Rombergi valem, 67
 ruumalakoordinaadid, 64, 74
 ruutkeskmine lähendamine, 19

 süsteemi topoloogia, 29

 silindriline jäikus, 122
 Simpsoni $\frac{3}{8}$ valem, 70
 Simpsoni valem, 70, 82
 sirgete normaalide hüpotees, 116
 sisejõud, 43
 märgireegel, 34
 põikjõud, 43
 paindemoment, 43
 pikkejõud, 43
 väändemoment, 43
 sisejõudude töö, 26
 sisejõudude võimalik töö, 16, 82
 staatilised rajatingimused, 16, 126
 staatiliste rajatingimuste hälve, 20
 subparameetriline element, 86
 superparameetriline element, 86
 suunakoosinus, 33

 täielikkuse nõue, 136
 töö
 aktiivtöö, 26
 mahujõudude, 103
 passiivtöö, 26
 rajajõudude, 12, 104
 rajajõudude töö, 26
 rajajõudude võimalik töö, 16
 sisejõudude töö, 26
 sisejõudude võimalik töö, 16
 toereaktsioonide, 12
 välisjõudude võimalik töö, 16
 tööde vastastikkuse teoreem, 16
 tööde vastastikkuse tereem, 16
 tööseisund, 43
 lõige, 43
 paine, 43
 pike, 43
 vääne, 43
 Tšebõšovi polünoom, 68
 taandatud koormused, 108
 tala diferentsiaalseosed, 42
 tasanddeformatsioon, 96
 tasandpingus, 96, 121
 teine märgikokkulepe, 82
 teisendusmaatriks, 95

- pikkele töötava varda teisendusmaat-
riks, 35
- tetraeeder, 64
- toereaktsioonide töö, 12
- topoloogia
 - süsteemi topoloogia, 29
- vääne, 43
- välisjõudude võimalik töö, 16
- Võrrandisüsteem
 - lindi laius, 41
- variatsioon, 143
- variatsiooniprintsiip
 - Felippa printsiip, 147
 - Hellingeri-Reissneri printsiip, 146
 - Hu-Washizu printsiip, 146
 - potentsiaalse energia miinimumi print-
siip, 143, 145
 - potentsiaalse täiendenergia miinimumi
printsiip, 146
- varrassüsteemi arvutusskeem, 37
- vedru jäikusmaatriks, 24
- vektor
 - skalaarkorrutis, 33
- vektorkorrutis, 76
- virtuaalsiire, 16
- virtuaalsiirete printsiip, 80, 83